SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
CAMPUS UNIVERSITÁRIO REITOR JOÃO DAVID FERREIRA LIMA - TRINDADE
CEP: 88040-900 - FLORIANÓPOLIS - SC
TELEFONE (048) 3721-2308
E-mail: ppgfsc@contato.ufsc.br

Gabarito da prova do Processo Seletivo do PPGFSC/UFSC – semestre 2014-1

1A) Um plano infinito **isolante**, carregado com densidade superficial de carga σ_1, repousa sobre o plano xy. Um segundo plano infinito **isolante**, de densidade σ_2, repousa sobre o plano xz. Utilizando a **Lei de Gauss**, encontre o vetor resultante $\vec{E}$. Em seguida, sabendo que o campo elétrico resultante forma um ângulo de 60° com o plano xy, determine a razão σ_2/σ_1.

a) $\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\hat{i}+\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}\hat{j};\frac{1}{2}$

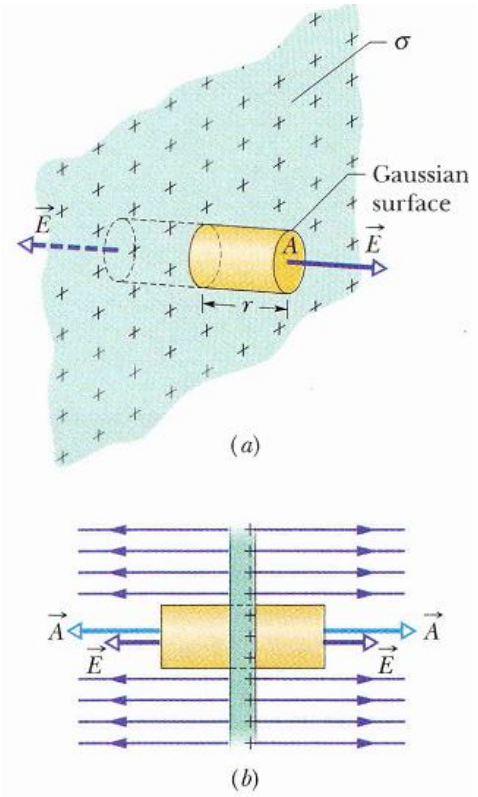
b) $\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\hat{i}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{j};\sqrt{3}$

c) $\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\hat{j}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{k};\frac{1}{2}$

d) $\boxed{\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\hat{j}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{k};\sqrt{3}}$

e) nda

Como houve dois erros de digitação no enunciado acima; onde está escrito plano xy deveria se ler plano xz e vice-versa para o plano infinito 2; aceitaremos também como correta a escolha o item e) nda, juntamente com a justificativa adequada. Abaixo a resolução corrigindo os erros de digitação:



Para plano 1:

$$\Phi_E=\oint\vec{E}_1\cdot d\vec{A}=\oint E_1 dA=\frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$\textbf{tampas}:\ \vec{E}_1\,//\,\vec{A};\quad \textbf{lateral}:\ \vec{E}_1\perp\vec{A}$$

$$E_1\text{A}+E_1A=\frac{(\sigma_1 A)}{\varepsilon_0}\Rightarrow E_1=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\Rightarrow\vec{E}_1=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\hat{j}$$

Para plano 2:

$$\Phi_E=\oint\vec{E}_2\cdot d\vec{A}=\oint E_2 dA=\frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$\textbf{tampas}:\ \vec{E}_2\,//\,\vec{A};\quad \textbf{lateral}:\ \vec{E}_2\perp\vec{A}$$

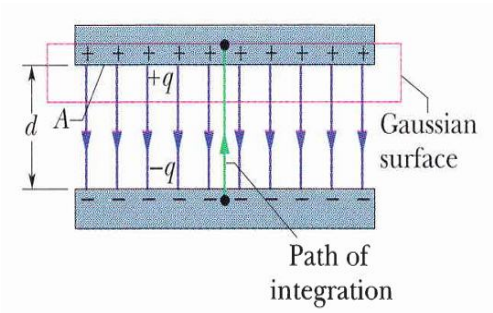
$$E_2\text{A}+E_2A=\frac{(\sigma_2 A)}{\varepsilon_0}\Rightarrow E_2=\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\Rightarrow\vec{E}_2=\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{E}=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\hat{j}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{k}}$$

$$\boxed{tg60^o = \sqrt{3} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}.\frac{2\varepsilon_0}{\sigma_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}}$$

1B) Duas placas paralelas condutoras, separadas por uma distância d e com vácuo entre elas, apresentam capacitância de 7 mF. Dobrando a separação e inserindo-se um dielétrico de mesma área e espessura 1,5 d, obtém-se uma capacitância equivalente de 8 mF. Calcule a constante dielétrica κ deste material.

a) $\frac{8}{7}$
b) $\boxed{4}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{7}{8}$
e) nda



Antes de inserir dielétrico :

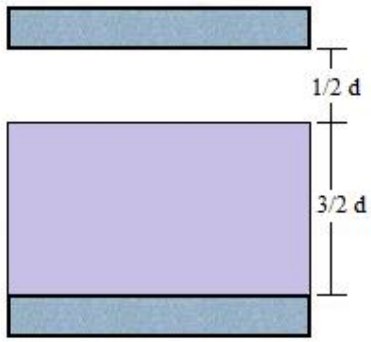
Lei de Gauss : $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

$$\underset{\text{dentro do condutor}}{\int \vec{E} \cdot d\vec{A}} + \underset{\text{entre as placas}}{\int \vec{E} \cdot d\vec{A}} + \underset{\text{laterais}}{\int \vec{E} \cdot d\vec{A}} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$0 + EA + 0 = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, placa + para placa -

$$\boxed{\Delta V = V_+ - V_- = -\int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_+^- ds = \frac{qd}{\varepsilon_0 A}}$$

$$\boxed{C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q\varepsilon_0 A}{qd} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = 7mF}$$



Depois de inserir o dielétrico :

C_1 em série com C_2 ; $C_{eq} = 8mF$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Mas,

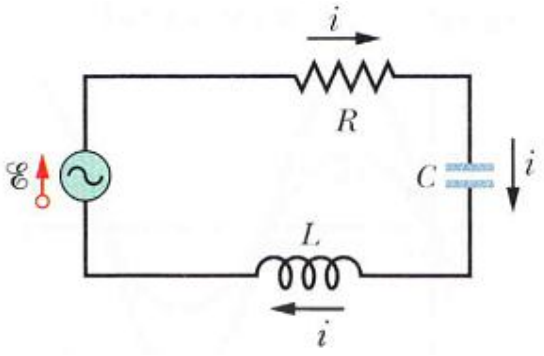
$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{1/2d} = 2C \quad \text{e} \quad C_2 = \kappa\frac{\varepsilon_0 A}{3/2d} = \frac{2\kappa}{3}C$$

Logo :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{2C} + \frac{3}{2\kappa C} = \frac{1}{2C}\left(1 + \frac{3}{\kappa}\right)$$

$$\frac{2C}{C_{eq}} = \frac{2.7mF}{8mF} = 1 + \frac{3}{\kappa} \Rightarrow \frac{3}{\kappa} = \frac{3}{4} \Rightarrow \kappa = 4$$

2A) Considere um circuito RLC em série conectado a uma fonte de corrente alternada, cuja fem é dada por $\varepsilon(t) = \varepsilon_m \operatorname{sen}(\omega t)$ e cuja corrente total é dada por $i(t) = i_m \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$. Sabendo que $\varepsilon_m = 120V$, $i_m = 10A$ e que a corrente está atrasada de 60° em relação à fem, qual o valor da resistência R?



a) 8Ω
b) 12Ω
c) 6Ω
d) 10Ω
e) nda

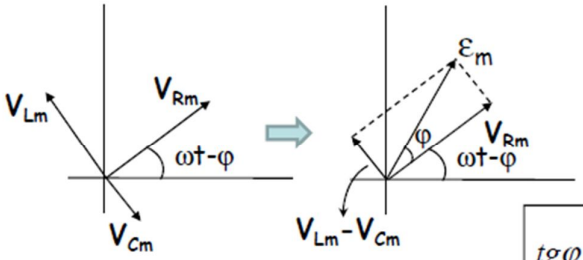
Lei das Malhas: $\varepsilon(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$

$$V_R(t) = Ri_m \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) = V_{Rm} \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$$

$$V_L(t) = \frac{Ldi(t)}{dt} = \omega L i_m \cos(\omega t - \varphi) = X_L i_m \cos(\omega t - \varphi) = V_{Lm} \operatorname{sen}\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{\int i(t)dt}{C} = \frac{i_m}{\omega C}\left[-\cos(\omega t - \varphi)\right] = X_C i_m \left[-\cos(\omega t - \varphi)\right] = V_{Cm} \operatorname{sen}\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Diagrama de Fasores:



$$\varepsilon_m = \sqrt{V_{Rm}^2 + (V_{Lm} - V_{Cm})^2}$$

$$\varepsilon_m = i_m \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

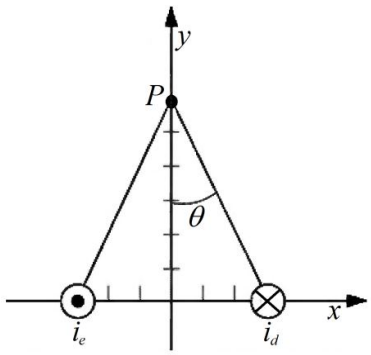
$$i_m = \frac{\varepsilon_m}{Z} \Rightarrow \boxed{Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

$$\boxed{tg\varphi = \frac{V_{Lm} - V_{Cm}}{V_{Rm}} = \frac{i_m X_L - i_m X_C}{i_m R} = \frac{X_L - X_C}{R}}$$

$$(X_L - X_C) = R tg\varphi$$

$$Z = \sqrt{R^2 + R^2 tg^2\varphi} = R\sqrt{1 + tg^2\varphi} \Rightarrow R = \frac{Z}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}} = \frac{\varepsilon_m / i_m}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}} = \frac{120V / 10A}{\sqrt{1 + tg^2 60^o}} = \frac{12\Omega}{\sqrt{1+3}} = 6\Omega$$

2B) Um fio longo retilíneo, transportando uma corrente de 1.5 A na direção z positiva encontra-se ao longo da linha x = -3 cm, y = 0. Um segundo fio transportando uma corrente de mesmo módulo, na direção z negativa, encontra-se ao longo da linha x = +3 cm, y = 0. Encontre o vetor campo magnético em um ponto P sobre o eixo y, em y = 6 cm.



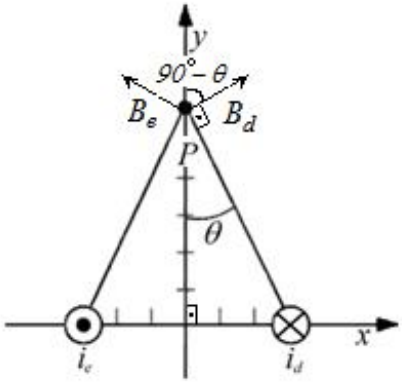
a) $(2\mu T)\hat{j}$

b) $(1\mu T)\hat{i}$

c) $(4\mu T)\hat{i}$

d) $\boxed{(4\mu T)\hat{j}}$

e) nda



Lei de Ampère para fio reto longo :

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = \oint_C B ds\cos\theta = B\oint_C ds = B(2\pi r) = \mu_0 i$$

$$\Rightarrow \left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

$$\vec{B}_R = \vec{B}_d + \vec{B}_e$$

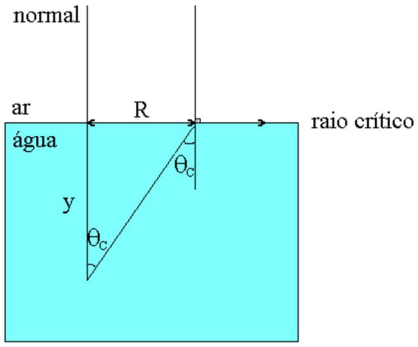
$$\left|\vec{B}_d\right| = \frac{\mu_0 i_d}{2\pi r} = \frac{4\pi.10^{-7}\,T.m/A.1{,}5A}{2\pi\sqrt{45}.10^{-2}\,m} = \frac{30}{\sqrt{45}}\mu T = \left|\vec{B}_e\right| = B$$

$$B_R = 2B\cos(90^o - \theta) = 2Bsen\theta = 2.\frac{30}{\sqrt{45}}\mu T.\frac{3cm}{\sqrt{45}cm} = 4\mu T$$

$$\vec{B}_R = (4\mu T)\hat{j}$$

3A) Uma fonte puntiforme está a uma distância *y* abaixo da superfície de certa massa de água. Dependendo do ângulo de incidência da luz sobre a interface água-ar, o raio será refratado, ou sofrerá reflexão total. Encontre o diâmetro *D* do maior círculo na superfície através do qual a luz pode emergir da água, supondo *y* = 80 cm, n_{ar} = 1 e $n_{água}$ = 1,33.

a) 3,6m
b) 0,9m
c) 1,8m
d) 2,6m
e) nda



$$tg\theta_C = \frac{sen\theta_C}{\cos\theta_C} = \frac{R}{y} = \frac{D}{2y} \Rightarrow D = 2y\frac{sen\theta_C}{\cos\theta_C}$$

Lei de Snell:

$$n_{água}\, sen\theta_C = n_{ar}\, sen90^o = 1$$

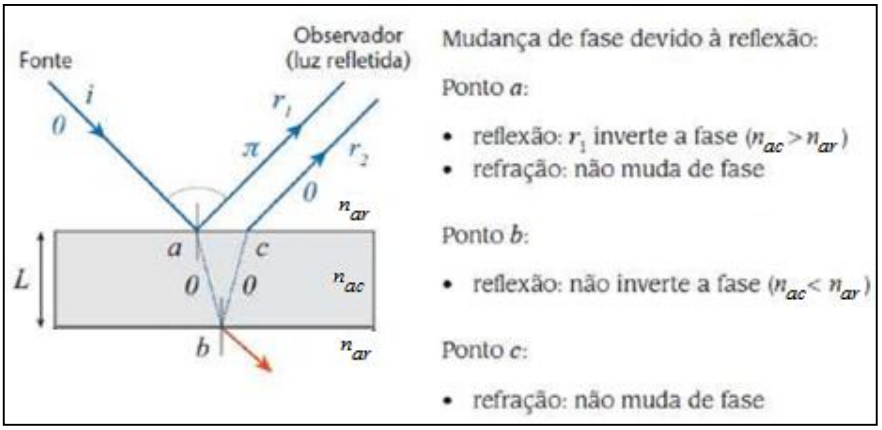
$$sen\theta_C = \frac{1}{n_{água}}; \cos\theta_C = \sqrt{1 - sen^2\theta_C} = \frac{\sqrt{n_{água}^2 - 1}}{n_{água}}$$

Logo:

$$D = 2y\frac{1}{n_{água}} \cdot \frac{n_{água}}{\sqrt{n_{água}^2 - 1}} = \frac{2y}{\sqrt{n_{água}^2 - 1}} = \frac{2.0{,}8m}{\sqrt{1{,}33^2 - 1}} \approx 1{,}8m$$

3B) Uma onda luminosa com comprimento de onda λ = 544 nm incide quase perpendicularmente em uma película de acetona (n_{ac} = 1,36) suspensa no ar (n_{ar} = 1.0). Quais as duas menores espessuras do filme para as quais as ondas refletidas pelo filme sofrem interferência destrutiva?

a) 100 nm, 300 nm
b) 272 nm, 544 nm
c) 136 nm, 408 nm
d) 200 nm, 400 nm
e) nda



Condição para interferência destrutiva :

$$\Delta \boldsymbol{L} = \left(\boldsymbol{m} + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{\boldsymbol{n_{ac}}} + \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\boldsymbol{n_{ac}}}$$

Para incidência quase perpendicular, a diferença de caminho entre os dois raios é :

$$2\mathrm{L} = (\mathrm{m}+1)\frac{\lambda}{\boldsymbol{n_{ac}}} \Rightarrow \boldsymbol{L} = (\mathrm{m}+1)\frac{\lambda}{2\boldsymbol{n_{ac}}}$$

Logo,

$$\boldsymbol{m} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{L}_0 = \frac{\lambda}{2\boldsymbol{n_{ac}}} = \frac{544\boldsymbol{nm}}{2.1{,}36} = 200\boldsymbol{nm}$$

$$\boldsymbol{m} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{L}_1 = \frac{\lambda}{\boldsymbol{n_{ac}}} = \frac{544\boldsymbol{nm}}{1{,}36} = 400\boldsymbol{nm}$$

4A) Um bloco de gelo de massa 10 g e a temperatura -15 ^{o}C é colocado em um lago com água a temperatura de 15 ^{o}C. Calcule a variação de entropia do sistema gelo-lago, supondo não haver troca de calor com outros corpos. Dados: calor específico do gelo: 2220 J/kg.K; calor específico da água: 4190 J/kg.K; calor latente de fusão da água: 3,33 x 10^5 J/kg.

0 J/K;
1,73 J/K;
-1.35 J/K;
3,30 J/K;
Nenhuma das anteriores.

Como o lago funciona como um reservatório, a temperatura é constante
e $\Delta S_{lago} = \Delta Q / T_{lago}$
e ΔQ é o calor cedido à água. Portanto, o calor absorvido por esta subtância será:
$\Delta Q_{água} = -\Delta Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 > 0$
Onde
ΔQ_1 calor absorvido pelo gelo quando vai de -15 graus até 0.
ΔQ_2 calor latente na transformação gelo água
ΔQ_3 calor absorvido pela água quando vai de 0 a 15 graus.
Assim,
$\Delta Q_{água} = m_g c_g \Delta T_1 + m_g L + m_g c_a \Delta T_2 = 4291{,}50 J$

A variação da entropia do lago será então
$\Delta S_{lago} = -\Delta Q_{água} / T_{lago} = -14{,}89 J / K$

Para a água,
$\Delta S_{água} = 15{,}68 J / K$

$\Delta S_{universo} = \Delta S_{água} + \Delta S_{lago} = 0.79 J / K$

4B) No modelo de Ising, spins interagem de acordo com a hamiltoniana

$$H = -J \sum_{<i,j>} S_i S_j ,$$

onde os spins S_i podem assumir os valores +1 e -1. Suponha então um sistema finito de 3 spins, com hamiltoniana

$$H = -J\left(S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1 \right)$$

e em contato com um reservatório térmico a temperatura T.

Calcule a magnetização desse sistema pequeno, definida por $\left(1/3\right)\left\langle S_1 + S_2 + S_3 \right\rangle$, onde $\left\langle \ldots \right\rangle$ denota uma média térmica .

A)1;
B)1-$(k_B T/J)^2$, onde k_B é a constante de Boltzmann;
C) 0;
D) 1/3;
E) Nenhuma das anteriores.

O Modelo proposto tem simetria de inversão, ou seja, um microestado com valores de spin (S_1, S_2, S_3) tem o mesmo peso estatístico que o microestado obtido por inversão de spins do estado anterior, ou seja $(-S_1, -S_2, -S_3)$. Como a magnetização microscópica desse estado tem mesmo módulo mas sinal contrário á do estado invertido, á média térmica é nula.

5A) Uma partícula livre está sob ação de uma força de atrito dependente da velocidade do tipo $F(v) = -bv$. A partícula tem massa m e sua velocidade é v_0 em $t = 0$. Determine: a) o tempo total para a partícula parar ; b)a distância total percorrida desde o instante $t = 0$.

a) Infinito, infinito.

b) 2b/m, $2v_0 m/b$

c) infinito, $v_0 m/b$

d) b/m, infinito

e) nenhuma das anteriores.

Resposta: item (c)
Da segunda lei de Newton temos:

$\frac{dv}{v} = -\frac{b}{m}dt$, e integrando de v_0 até v obtemos

$v = v_0 e^{\frac{-b}{m}t}$ o que corresponde a um tempo infinito para a partícula parar.

Integrando novamente, determinamos $x(t) - x(0) = \frac{-mv_0}{b}\left(e^{\frac{-b}{m}t} - 1\right)$, ou seja, em $t = \infty$

$$x(t) - x(0) = \frac{mv_0}{b}$$

5B) Dado o potencial $V(r) = \frac{-1}{r} + \frac{2}{r^2}$ determine a freqüência para pequenas oscilações em torno do ponto de equilíbrio para uma partícula de massa =1.

a) 1/8

b)1/2

c) 1

d) 2

e) nenhuma das anteriores.

Resposta: item (a)

O ponto de equilíbrio é obtido fazendo:
$\frac{dV}{dr} = 0$, o que nos dá: $r_0 = 4$
E a freqüência correspondente será

$$w = \sqrt{\frac{\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_{r=r0}}{m}}$$

Resultando $w = 1/8$

6A) Uma partícula de massa m desloca-se sob ação de um potencial $V(\theta)$. Sua energia cinética é $T = \frac{1}{2m}\left(P_r^2 + \frac{P_\theta^2}{r^2} + \frac{P_\phi^2}{r^2 sen^2(\theta)}\right)$, sendo P_i os momentos e (r,θ,ϕ) as coordenadas. Responda se as alternativas abaixo são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta. (Questões sem justificativa serão desconsideradas).

a) (F) $P_\theta = m\dot{\theta}$.

P_θ é o par canônico de uma coordenada angular, logo deve ser identificado com um momento angular.

b) (F) O momento P_θ é constante.

Para P_θ ser constante é preciso que a coordenada θ não compareça na hamiltoniana, o que não é o caso.

C (V) O momento P_ϕ é constante.

Sim, ϕ é coordenada cíclica.

D(V) A energia total é constante.

Correto, podemos perceber que a hamiltoniana é escrito em temos dos momentos ao quadrado, e não contém o tempo explícito.

6B) A hamiltoniana de um determinado sistema físico é $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = q_1 p_1 - q_2 p_2 - a q_1^2 + b q_2^2$ senda a e b constantes.
Responda se as alternativas abaixo são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta. (Questões sem justificativa serão desconsideradas).

a) (F) $G_1 = \dfrac{p_2}{q_1}$ é constante de movimento.

Para demonstrar, ou calculamos $p_2(t)$ e $q_1(t)$ ou usamos os colchetes de Poison, ou seja $\dfrac{dG_1}{dt} = \{G_1, H\} + \dfrac{\partial G_1}{dt}$, o que resulta $-2bq_2 / q_1$, ou seja, diferente de zero.

b) (V) $G_2 = q_1 q_2$ é constante de movimento.
Mesma resposta que o item anterior, resultando zero.

C) (V) $G_3 = q_1 e^{-t}$ é constante de movimento.
Mesma resposta que o item anterior, resultando zero.

e) (V) A própria hamiltoniana é uma constante de movimento.

Correto. Apesar da hamiltoniana não poder ser diretamente associada à energia, ela, por si só é uma constante de movimente.
A demonstração é idêntica aos itens anteriores,

7A) Uma partícula, sob ação da força gravitacional, está vinculada a se mover sobre uma reta $y = ax$, sendo os eixos x e y do sistema de referência dados na orientação usual. Sendo g a aceleração da gravidade, determine a aceleração na direção x.

A) $\vec{\ddot{x}} = (g/a)\hat{i}$

B) $\vec{\ddot{x}} = (ga/(1+a^2))\hat{i}$

C) $\vec{\ddot{x}} = (ag)\hat{i}$

D) $\vec{\ddot{x}} = (a^2 g)\hat{i}$

E) Nenhuma das anteriores.

Resposta: Nda

Podemos resolver usando o formalismo lagrangeano, por exemplo.

Assim, temos $T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$.

$V = mgy$.

Temos o vínculo $y = ax$, ou seja $\dot{y} = a\dot{x}$.

Assim, $L = \frac{m}{2}\dot{x}^2\left(1+a^2\right) - mgax$

Das equações de lagrange obtemos

$$\ddot{x} = \frac{-ga}{(1+a^2)}$$

7B) Um sistema consiste de dois corpos de massa M e $2M$, movendo-se com as respectivas velocidades $\vec{v} = v_0\left(3\hat{i} + 2\hat{j}\right)$ e $\vec{u} = v_0\left(\hat{i} + 4\hat{k}\right)$. Determine a velocidade do centro de massa do sistema.

a) $\vec{V} = 0$

b) $\vec{V} = \frac{v_0}{2}\left(5\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}\right)$

c) $\vec{V} = \frac{v_0}{3}\left(5\hat{i} + 2\hat{j} + 8\hat{k}\right)$

d) $\vec{V} = v_0\left(4\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}\right)$

e) nenhuma das anteriores.

Resposta; item c

Basta fazer

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

e

$$\vec{v}_{cm} = \dot{\vec{r}}_{cm} = \frac{\dot{\vec{r}}_1 + 2\dot{\vec{r}}_2}{3} = \frac{v_0}{3}\left(5\hat{i} + 2\hat{j} + 8\hat{k}\right)$$

8A) Responda se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Escreva uma justificativa para cada item. Itens sem justificativa serão desconsiderados.

(F) Para o fóton temos que $E = pc$ e da relação de Planck temos que $E = hv$. Como $c = \lambda v$, decorre a relação de de Broglie $p = \frac{h}{\lambda}$. Portanto, a relação de de Broglie vale apenas para o fóton.

R: A relação de de Broglie também se aplica para partículas com massa de repouso não-nula. Logo a dedução acima é um caso particular.

(V) Não é possível observar efeitos ondulatórios de uma bola de futebol no nosso cotidiano porque precisaríamos de fontes de difração muito pequenas, em geral, muito menores que o tamanho dos núcleos atômicos.

R: Para que os efeitos ondulatórios se tornem perceptíveis, tais como a difração, é preciso que o comprimento de onda seja da ordem da fonte de difração. Para uma bola podemos utilizar os valores aproximados de $m \sim 1kg$ para a sua massa e $v \sim 1m/s$ para a sua velocidade, de modo que através da relação de de Broglie encontramos o comprimento de onda associado à bola $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{1.10^{-34} J.s}{1Kg.m.s^{-1}} \sim 10^{-34} m$. O raio nuclear típico é da ordem de $10^{-14} m$.

(F) Os elétrons nos metais estão livres para se moverem, por isso, quando um fóton atinge o cátodo no efeito fotoelétrico este sempre é ejetado.

R: Para que o efeito fotoelétrico aconteça é necessário que o fóton incidente tenha pelo menos a energia necessária para arrancar o elétron do metal. Portanto, mesmo nos metais os elétrons estão ligados, ainda que fracamente (~2 eV). Ainda, utilizando a conservação do momento linear total e da energia total, é impossível que um elétron livre absorva completamente um fóton (hipótese de Einstein) sem violar um desses dois princípios.

(V) No efeito Compton a radiação espalhada possui comprimento de onda maior ou igual ao comprimento de onda da radiação incidente.

R: No efeito Compton o fóton incidente perde parte de sua energia ao ser espalhado por elétrons mais fracamente ligados ao material, ficando com energia menor após o espalhamento. Como a energia do fóton é $E = hv$, então se a frequência diminui, significa que o comprimento de onda aumenta. Contudo, há situações onde o fóton incidente é espalhado por elétrons fortemente ligados ao material, o que significa que o seu espalhamento é realizado praticamente pelo átomo inteiro, não tendo o seu comprimento de onda alterado após o espalhamento.

(V) É possível produzir raios-X através da desaceleração de elétrons com energia cinética de 10 keV.

R: Na situação em que o elétron é totalmente freado ao ser desacelerado, a sua energia cinética inicial de 10 keV = $1{,}6.10^{-15}$ J gera radiação com comprimento de onda de

$E = \frac{hc}{\lambda} => \lambda = \frac{hc}{E} \sim \frac{10^{-34} \times 10^{8}}{10^{-15}} = 10^{-11} m.$

Os raios-X possuem comprimento de onda que variam entre $10^{-12} m \leq \lambda \leq 10^{-9} m$.

8B) Responda se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Escreva uma justificativa para cada item. Itens sem justificativa serão desconsiderados.

(V) No processo de aniquilação de um par elétron-pósitron são gerados dois fótons com energia mínima de 0,5 MeV cada um.

R: A energia total de um elétron livre é $E_- = K_- + m_0c^2$, onde K_- é a sua energia cinética e m_0c^2 é a energia de repouso. A energia total de um pósitron livre é $E_+ = K_+ + m_0c^2$, onde K_+ é a sua energia cinética e m_0c^2 é a energia de repouso. A energia mínima que o par elétron-pósitron possui é $E_{+-} = 2m_0c^2$, sendo necessário a criação de pelo menos dois fótons para que o momento linear total seja conservado. Assim a energia de cada fóton é $E_\gamma = m_0c^2 = 0{,}5\ MeV$.

(F) Um fóton viajando livre no espaço com energia de 1 MeV pode sozinho dar origem um par elétron-pósitron que permanece em repouso após a sua criação.

R: Pela conservação do momento linear total, se o par elétron-pósitron fica em repouso após a sua criação então o momento linear total final é nulo, o que significa que um fóton sozinho não pode criar tal par, uma vez que um fóton nunca está em repouso.

(V) De acordo com a dualidade onda-partícula de Louis de Broglie, a descrição ondulatória de uma partícula livre com massa de repouso não-nula é feita através de um pacote de ondas.

R: Através do pacote de ondas é possível introduzir o caráter de localização da partícula. Por sua vez, utilizando-se uma onda plana monocromática a partícula seria um objeto completamente deslocalizado no espaço.

(V) De acordo com o princípio da complementaridade formulado por Niels Bohr, o caráter dual de uma partícula não poder ser testado simultaneamente na mesma medida.

R: O princípio da complementaridade de Bohr afirma que é impossível na mesma medida testar simultaneamente o caráter de partícula e de onda, a natureza da medida seleciona o seu caráter.

(F) O modelo atômico de Rutherford explica o espectro de emissão dos átomos de hidrogênio.

R: O modelo atômico de Rutherford explicava bem o espalhamento de partículas alfa por átomos. Contudo, somente com o modelo atômico de Niels Bohr é que o espectro de emissão atômico foi explicado.

9A) As soluções da equação de Schrödinger independente do tempo para um poço de potencial quadrado infinito unidimensional que se estende de 0 até a são dadas por

$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$,

onde n é um número inteiro. Dado que o estado inicial do sistema é o primeiro estado excitado, calcule a probabilidade do estado do sistema no tempo t ser encontrado em uma superposição igual de $\psi_1(x)$ e $\psi_3(x)$.

A. 0

B. 1

C. ½

D. $1/\sqrt{2}$

E. Nenhuma das anteriores.

R: O estado fundamental é aquele em que n=1, uma vez que para n=0 a autofunção é nula para todos os valores $x \in [0, a]$. Portanto, o primeiro estado excitado é aquele em que n=2, de modo que no tempo t

$$\psi_2(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}} sen\left(\frac{2\pi x}{a}\right) e^{-iE_2 t/\hbar},$$

onde E_2 é a energia do segundo estado excitado. Como $\psi_1(x)$ e $\psi_3(x)$ são ortonormais, o estado normalizado criado a partir da superposição igual destes estados é

$\psi(x) = \frac{\psi_1(x)+\psi_3(x)}{\sqrt{2}}$.

Então a probabilidade de $\psi_2(x,t)$ ser encontrado em $\psi(x)$ é

$$P(x,t) = \left|\int_0^a \psi_2^*(x,t)\,\psi(x)dx\right|^2 = \left|e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \int_0^a \psi_2^*(x)\left[\frac{\psi_1(x)+\psi_3(x)}{\sqrt{2}}\right]dx\right|^2$$

Como $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ e $\psi_3(x)$ são ortogonais entre si, $P(x,t) = 0$.

Portanto, a resposta A é a correta.

OBS: Devido à impressão ruim da prova, o índice 3 do estado $\psi_3(x)$ não estava nítido, podendo levar à confusão com o índice 2. O candidato que considerou $\psi_2(x)$ ao invés de $\psi_3(x)$ teve a sua questão avaliada normalmente, sendo a letra C a resposta correta.

9B) Um oscilador harmônico quântico simples pode ser utilizado para descrever uma grande variedade de sistemas físicos no limite de pequenas oscilações. Alguns exemplos são: um modo de vibração do campo de radiação dentro de uma cavidade, um modo de oscilação de uma molécula diatômica, vibração de uma nano membrana, vibração do centro de massa de um íon aprisionado, etc. Um modo de vibração do campo de radiação dentro de uma cavidade pode ser descrito pelo operador campo elétrico $E(t) = E_0(ae^{i\omega t} + a^\dagger e^{-i\omega t})$ na representação de Heisenberg, onde E_0 é a amplitude do campo elétrico, ω é a frequência de oscilação e a e $a^\dagger$ são os operadores de aniquilação e criação do oscilador harmônico, que satisfazem as seguintes relações $aa^\dagger = 1 + a^\dagger a$ e $a|0\rangle = 0$, sendo $|0\rangle$ o estado de vácuo. Calcule a incerteza do campo elétrico no estado fundamental do oscilador harmônico simples.

A. $E_0/8$

B. $E_0/2$

C. $E_0/4$

D. E_0

E. Nenhumas das alternativas anteriores.

R: O estado fundamental do oscilador harmônico simples é o estado de Fock $|0\rangle$, o qual é definido a partir da condição $a|0\rangle = 0$.

Para calcular a incerteza no campo elétrico precisamos avaliar

$\langle E(t)\rangle = \langle 0|E_0(ae^{i\omega t} + a^\dagger e^{-i\omega t})|0\rangle = 0,$
e

$$\langle E^{2(t)}\rangle = \langle 0|E_0^2(ae^{i\omega t} + a^\dagger e^{-i\omega t})^2|0\rangle = E_0^2\langle 0|aa^\dagger + a^\dagger a|0\rangle = E_0^2,$$

onde foi usado o fato de que $aa^\dagger = 1 + a^\dagger a$ e $a|0\rangle = 0$.
Portanto, a incerteza no campo elétrico é

$$\Delta E = \sqrt{\langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2} = E_0.$$

A reposta correta é a alternativa D.

10A) Considere a solução estacionária da equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio $\Psi_{31-1}(r,\theta,\varphi)$. O produto das incertezas nas componentes do momento angular L_x e L_y é

A. $\Delta L_x \Delta L_y \geq \frac{\hbar}{4}$

B. $\Delta L_x \Delta L_y \geq \frac{\hbar^2}{4}$

C. $\Delta L_x \Delta L_y \geq \frac{\hbar^2}{2}$

D. $\Delta L_x \Delta L_y \geq \hbar^2$

E. Nenhumas das alternativas anteriores.

R: Dado dois operadores hermitianos A e B que não comutam, o produto das suas incertezas é dada por
$\Delta A \Delta B \geq \frac{|\langle [A,B] \rangle|}{2}$.

Os operadores de momento angular L_x e L_y satisfazem a seguinte relação

$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$,

logo

$$\Delta L_x \Delta L_y \geq \frac{\hbar |\langle L_z \rangle|}{2}.$$

Como

$L_z \Psi_{31-1}(r,\theta,\varphi) = -\hbar \Psi_{31-1}(r,\theta,\varphi)$,

decorre que

$$\langle L_z \rangle = -\hbar,$$

o que implica em

$$\Delta L_x \Delta L_y \geq \frac{\hbar^2}{2}.$$

A resposta correta é a letra C.

10B) Considere um elétron em repouso em um campo magnético constante de intensidade B_0 apontando no sentido positivo do eixo z. Inicialmente o estado de spin do elétron se encontra em uma superposição com contribuições iguais de suas componentes $|0\rangle$ e $|1\rangle$, sendo estes definidos por $\sigma_z \left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\rangle = \pm \left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\rangle$. Calcule a probabilidade de encontrar o sistema no estado $|0\rangle$ após o tempo de evolução $t = \frac{\pi}{\gamma B_0}$, onde γ é a razão giromagnética.

A. 1

B. ½

C. ¼

D. 1/3

E. Nenhuma das anteriores.

R: O hamiltoniano de interação do elétron em repouso em um campo magnético apontando na direção z positiva é

$$H = -\vec{\mu}.\vec{B} = -\gamma\hbar\frac{\vec{\sigma}}{2}.\vec{B} = -\frac{\gamma B_0 \hbar}{2}\sigma_z.$$

O estado inicial dos sistema normalizado é dado por

$$|\psi(0)\rangle = \frac{|0\rangle + e^{i\phi}|1\rangle}{\sqrt{2}},$$

onde ϕ é uma fase arbitrária independente do tempo. O estado evoluído no tempo t será dado por

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}|\psi(0)\rangle = e^{i\frac{\gamma B_0 t}{2}\sigma_z}\left(\frac{|0\rangle + e^{i\phi}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{e^{i\frac{\gamma B_0 t}{2}}|0\rangle + e^{i\phi}e^{-i\frac{\gamma B_0 t}{2}}|1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

A probabilidade de medir o spin do elétron no estado $|0\rangle$ após o tempo de evolução $t = \frac{\pi}{\gamma B_0}$ é

$$P_0(\pi/\gamma B_0) = |\langle 0|\psi(\pi/\gamma B_0)\rangle|^2 = \left|\langle 0|\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}|0\rangle + e^{i\phi}e^{-i\frac{\pi}{2}}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}.$$

A reposta correta é a letra B.