SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
CAMPUS UNIVERSITÁRIO REITOR JOÃO DAVID FERREIRA LIMA - TRINDADE
CEP: 88040-900 - FLORIANÓPOLIS - SC
TELEFONE (048) 3721-2308
E-mail: ppgfsc@contato.ufsc.br

1A) Responda se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Escreva uma justificativa para cada item. Itens sem justificativa serão desconsiderados.

(F) É possível resfriar uma molécula diatômica que oscila como um oscilador harmônico simples de modo que esta não oscile mais.
R: A menor energia que um oscilador harmônico (1D) pode ter é $\hbar\omega/2$, onde ω é a freqüência de oscilação e $\hbar$ a constante de Planck dividida por 2π.

(F) O modelo atômico de Niels Bohr explicava bem espectro de emissão dos átomos hidrogenóides, mas não explicava fisicamente a estabilidade atômica.
R: O modelo de Bohr foi o primeiro modelo que descreveu de maneira adequada o espectro de emissão do átomo de hidrogênio e átomos tipo hidrogênio, também chamados de hidrogenóides. Contudo, teve que *postular* a que o elétron descrevia órbitas estáveis cujo momento angular era múltiplo inteiro de $\hbar$.

(V) O efeito fotoelétrico acontece apenas quando o fóton incidente possui energia suficiente para arrancar o elétron do metal, o que caracteriza a frequência de corte f_c de cada material.
R: A energia hf do fóton incidente necessária para arrancar um elétron do metal, o qual permanece com energia cinética $K = 0$ após a sua ejeção, é igual a função trabalho W. Então a frequência de corte é $f_c = W/h$.

(F) No efeito Compton a radiação espalhada possui frequência maior ou igual a frequência da radiação incidente.
R: No efeito Compton o fóton incidente de energia hf_i pode perder parte da sua energia inicial para espalhar o elétron atômico, ficando com energia hf_f menor ou igual ao final do processo. Portanto $f_i \geq f_f$.

(V) A teoria de Rayleigh-Jeans não era capaz de explicar o espectro de radiação de corpo negro porque atribuía a cada modo de vibração do campo eletromagnético a quantidade de energia kT, onde k é constante de Boltzmann e T a temperatura absoluta.
R: Para explicar corretamente o espectro de radiação de corpo negro era necessário levar em conta a dependência da energia de cada modo de vibração do campo eletromagnético a sua frequência de oscilação. Caso contrário poderiam surgir previsões errôneas como a catástrofe do ultravioleta.

1B) Responda se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Escreva uma justificativa para cada item. Itens sem justificativa serão desconsiderados.

(F) No processo de aniquilação de um par elétron-pósitron são gerados dois fótons com energia mínima de 1 MeV cada um.
R: A energia total de um elétron livre é $E_{-} = K_{-} + m_0c^2$, onde K_{-} é a sua energia cinética e m_0c^2 é a energia de repouso. A energia total de um pósitron livre é $E_{+} = K_{+} + m_0c^2$, onde K_{+} é a sua energia cinética e m_0c^2 é a energia de repouso. A energia mínima que o par elétron-pósitron possui é $E_{+-} = 2m_0c^2$, sendo necessário a criação de pelo menos dois fótons para que o momento linear total seja conservado. Assim a energia mínima de cada fóton é $E_{\gamma} = m_0c^2 = 0{,}5\ MeV$.

(V) Na teoria de Schrödinger, apesar do elétron no átomo de hidrogênio estar constantemente acelerado pelo potencial atrativo do núcleo, não há emissão de radiação quando o elétron está em determinados estados eletrônicos, chamados de estados estacionários.
R: As soluções estacionárias da equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio fornecem densidades de probabilidade independente do tempo, fazendo com que a densidade de carga não varie com o passar do tempo. Desse modo a distribuição de carga eletrônica não está acelerada, e portanto não emite radiação.

(F) De acordo com a dualidade onda-partícula de Louis de Broglie, um feixe composto por elétrons que carregam momento linear de $10^{-20} Kg.m.s^{-1}$ pode ser visto a olho nu.
R: Mesmo podendo ser uma amostra macroscópica do feixe de elétrons, o comprimento de onda de de Broglie associado é $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{10^{-34}}{10^{-20}} = 10^{-14}m$. Que é cerca de 100.000 vezes menor que o comprimento de onda na região do visível.

(F) De acordo com o princípio da correspondência formulado por Niels Bohr, o caráter dual de uma partícula não poder ser testado simultaneamente na mesma medida.
R: O princípio que afirma que o caráter dual de uma partícula não poder ser testado simultaneamente na mesma medida é o princípio da complementaridade, também formulado por Niels Bohr.

(F) O modelo atômico de Rutherford explica o espalhamento de partículas alfa por um átomo, mas não explica a estabilidade atômica.
R: O modelo atômico de Rutherford explica bem o espalhamento de partículas alfa por núcleos de átomos pesados. Contudo, a estabilidade atômica só foi explicada mais tarde pela teoria de Erwin Schrödinger.

2A) As soluções da equação de Schrödinger independente do tempo para um poço de potencial quadrado infinito unidimensional que se estende de 0 até a são dadas por

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right),$$

onde n é um número inteiro. Dado que o sistema se encontra no estado fundamental, a probabilidade de encontrar a partícula no intervalo entre *0* e *a/2* é

A. 0

B. 1

C. ½

D. $1/\sqrt{2}$

E. Nenhuma das anteriores.

Justifique a sua resposta.

R: Dado que a função de onda espacial para o estado fundamental ocorre para $n = 1$, fornecendo a solução

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} sen\left(\frac{\pi x}{a}\right),$$

temos que a probabilidade de encontrar a partícula entre $0 \leq x \leq a/2$ é $1/2$, uma vez que tal função é simétrica em torno do ponto $x = a/2$ para o intervalo $0 \leq x \leq a$.
Outra maneira de obter o mesmo resultado consistem em efetuar o cálculo explicitamente:

$$P\left(0 \leq x \leq \frac{a}{2}\right) = \int_0^{a/2} \psi_1^*(y)\psi_1(y)dy = \frac{2}{a}\int_0^{a/2} sen^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) dy = \frac{2}{a}.\frac{a}{4} = \frac{1}{2}.$$

2B) As autofunções espaciais de um oscilador harmônico quântico simples unidimensional são dadas por

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} H_n\left(\frac{m\omega x}{\hbar}\right) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}, \quad n = 0,1,2,3 \ldots,$$

onde m e ω são a massa e a frequência do oscilador, respectivamente, e $H_n(u)$ é um polinômio de Hermite de ordem n. Sabendo que o oscilador encontra-se no estado $\psi_9(x)$, a incerteza ΔH na energia do oscilador é

A. $\frac{\hbar\omega}{9}$

B. $9\hbar\omega$

C. $81\hbar\omega$

D. 0

E. Nenhumas das alternativas anteriores.

Justifique a sua resposta.

R: Como o oscilador harmônico simples quântico está no estado $\psi_9(x)$, que é um autoestado do operador hamiltoniano do sistema, não há incerteza na energia total média do sistema, fornecendo $\Delta H = 0$.
Outra maneira de obter o mesmo resultado consiste em efetuar os cálculo explicitamente. A equação de autovalor para o hamiltoniano do sistema é

$$H\psi_n = E_n\psi_n, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

o que implica em

$$H^2\psi_n = (E_n)^2\psi_n.$$

Como as autofunções são normalizadas, temos que

$$\langle H \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_9^*(x)H(x)\psi_9(x)dx = E_9 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_9^*(x)\psi_9(x)dx = E_9,$$

e

$$\langle H^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_9^*(x)H^2(x)\psi_9(x)dx = (E_9)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_9^*(x)\psi_9(x)dx = (E_9)^2.$$

Portanto,

$$\Delta H = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2} = 0.$$

3A) Considere a solução estacionária da equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio $\Psi_{322}(r,\theta,\varphi)$. O ângulo que a direção média do vetor momento angular faz com o eixo z é

A. $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

B. $\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

C. $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$

D. $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$

E. Nenhuma das anteriores

Justifique a sua resposta.

R: Da equação de autovalores para L_z temos que

$$L_z\Psi_{322} = 2\hbar\Psi_{322},$$

o que fornece

$$\langle L_z\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\Psi^*{}_{322}(r,\theta,\varphi)L_z\Psi_{322}(r,\theta,\varphi)r^2 dr sen\theta d\theta d\varphi = 2\hbar,$$

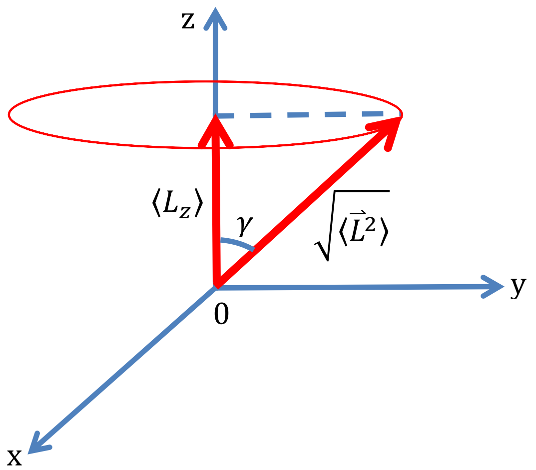
uma vez que $\Psi_{322}(r,\theta,\varphi)$ é normalizada. Repetindo o mesmo procedimento para o operador $\vec{L}^2$,

$$\vec{L}^2\Psi_{322} = \hbar^2 2(2+1)\Psi_{322} = 6\hbar^2\Psi_{322},$$

fornecendo

$$\langle\vec{L}^2\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\Psi^*{}_{322}(r,\theta,\varphi)\vec{L}^2\Psi_{322}(r,\theta,\varphi)r^2 dr sen\theta d\theta d\varphi = 6\hbar^2.$$

Graficamente temos que



$$\Longrightarrow cos\gamma = \frac{\langle L_z\rangle}{\sqrt{\langle\vec{L}^2\rangle}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

3B) Considere um elétron em repouso em um campo magnético constante de intensidade B_0 apontando no sentido positivo do eixo z. O hamiltoniano que descreve este sistema é $H = \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z$, onde $\omega = \gamma B_0$ e γ é a razão giromagnética do elétron. Dado que o estado do sistema em um dado instante de tempo é $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$, com as suas componentes definidas por $\sigma_z|0\rangle = |0\rangle$ *e* $\sigma_z|1\rangle = -|1\rangle$, tal que $\langle i|j\rangle = \delta_{i,j}$ e $i, j = 0, 1$, a probabilidade de encontrar como resultado da medida da energia do sistema o valor $-\frac{\hbar\omega}{2}$ é

A. 1

B. ½

C. ¼

D. 1/3

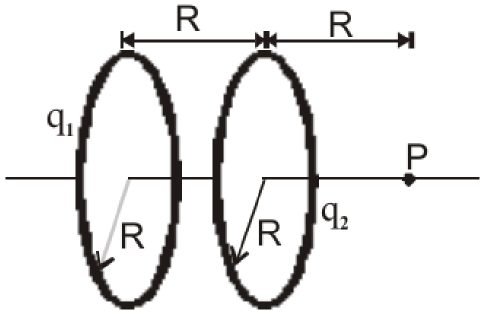
E. Nenhuma das anteriores.

Justifique a sua resposta.

R: De acordo com o hamiltoniano $H = \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z$ quando a energia do sistema é $-\frac{\hbar\omega}{2}$, o sistema está no estado $|1\rangle$. Portanto, a probabilidade de encontrar o sistema com energia $-\frac{\hbar\omega}{2}$ é

$$P = |\langle 1|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}.$$

4A) Dois anéis circulares de raio R contêm, respectivamente, cargas $q_1 = +q$ e q_2. Os anéis são paralelos entre si, têm o mesmo eixo e estão separados por uma distância R. O campo elétrico no ponto P, que está a uma distância 2R do primeiro anel é nulo. Determine o valor da carga q_2.



a) $q_2 = +\frac{q}{2}$

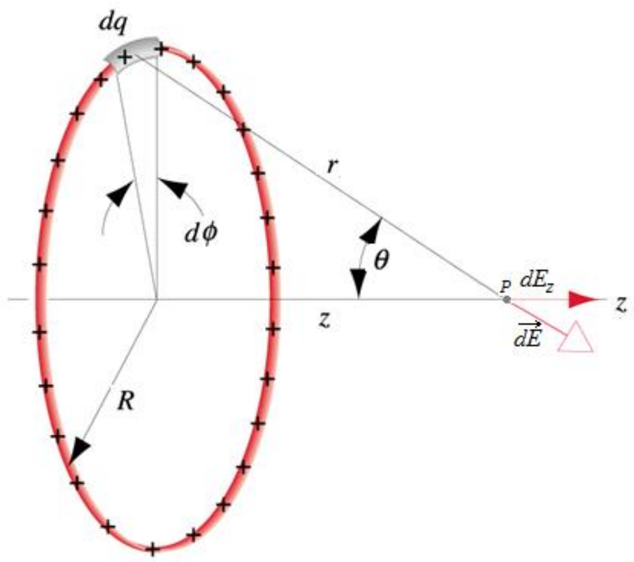
b) $q_2 = +2\left(\frac{2}{5}\right)^{3/2} q$

c) $q_2 = -\frac{q}{2}$

d) $\boxed{q_2 = -2\left(\frac{2}{5}\right)^{3/2} q}$

e) nda

Para cada anel de carga, o campo elétrico resultante num ponto qualquer ao longo do eixo z é:



$$\lambda = \frac{q}{2\pi R}; dq = \lambda R d\phi$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R d\phi}{\left(z^2 + R^2\right)}$$

$E_x = 0$ e $E_y = 0$, por questões de simetria

$$dE_z = dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R d\phi}{\left(z^2 + R^2\right)}\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

$$E_z = \int dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R z}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R z}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}.2$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q/2\pi R)Rz}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}.2\pi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qz}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

Para o anel 1, fazemos z = 2R e $q = q_1 = +q$:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q.2R}{\left(4R^2 + R^2\right)^{3/2}} = k\frac{q.2R}{5^{3/2}R^3} = k\frac{2q}{5^{3/2}R^2} \Rightarrow \vec{E}_1 = k\frac{2q}{5^{3/2}R^2}\hat{z}$$

Para o anel 2, fazemos z = R e $q = q_2$:

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2.R}{\left(R^2 + R^2\right)^{3/2}} = k\frac{q_2.R}{2^{3/2}R^3} = k\frac{q_2}{2^{3/2}R^2} \Rightarrow \vec{E}_2 = k\frac{q_2}{2^{3/2}R^2}\hat{z}$$

Para que o campo elétrico resultante em P seja nulo:

$$\vec{E}_R = k\frac{2q}{5^{3/2}R^2}\hat{z} + k\frac{q_2}{2^{3/2}R^2}\hat{z} = 0 \Rightarrow k\frac{q_2}{2^{3/2}R^2} = -k\frac{2q}{5^{3/2}R^2} \Rightarrow q_2 = -2.\left(\frac{2}{5}\right)^{3/2} q$$

4B) Um fio muito longo, orientado ao longo do eixo y e carregado com densidade linear de carga +λ, é colocado paralelamente, a uma distância d, de um plano infinito orientado no plano xy e carregado com densidade superficial de carga +σ. Sabe-se que o campo elétrico é nulo em certo um ponto e que a distância deste ponto ao fio é menor que d. A que distância do fio este ponto se encontra?

a) $\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi\sigma}}$

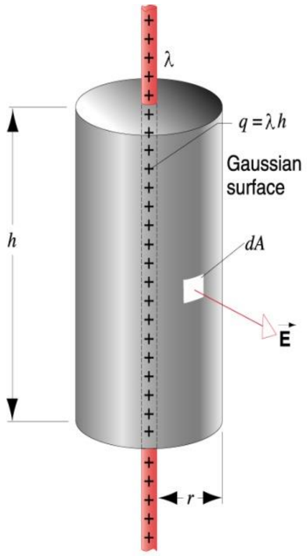
b) $\boxed{\frac{\lambda}{\pi\sigma}}$

c) $\frac{\lambda}{2\pi\sigma}$

d) $\sqrt{\frac{\lambda}{\pi\sigma}}$

e) *nda*

Campo elétrico no ponto P devido ao fio muito longo, orientado ao longo do eixo y:

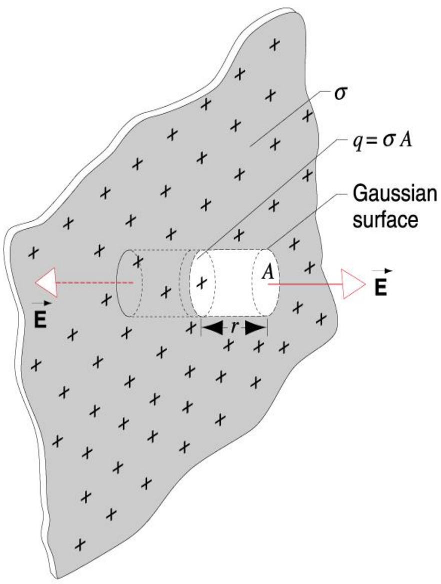


$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint EdA = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$E(2\pi rh) = \frac{(\lambda h)}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\vec{E}_f = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r} \Rightarrow \vec{E}_{f,P} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\hat{z}$$

Campo elétrico no ponto P devido ao plano infinito de cargas, orientado no plano xy:



$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint EdA = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$EA + EA = \frac{(\sigma A)}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_{pi} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\pm\hat{z})$$

Para que o campo elétrico resultante seja nulo em P:

$$\vec{E}_R = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\hat{z} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} = 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow d = \frac{\lambda}{\pi d}$$

5A) Considere um circuito oscilante LC ideal, onde $q(t) = q_m \cos(\omega t + \varphi)$. Qual o valor do menor instante em que a energia armazenada no campo elétrico do capacitor é igual a um terço da energia armazenada no campo magnético do indutor, sabendo que o capacitor está inicialmente carregado com 90% da carga máxima e que o sistema oscila com freqüência igual a 60 Hz?

a) *~ 1,6 ms*
b) *~2,8 ms*
c) *~ 0,8 ms*
d) *~ 4,8 ms*
e) *nda*

Energias armazenadas no capacitor e no indutor:

$$P_C = V_C i = \frac{dU_C}{dt} = \frac{q}{C}.\frac{dq}{dt} \Rightarrow U_C = \int \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \Rightarrow U_C(t) = \frac{1}{2C} q_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$P_L = V_L i = \frac{dU_L}{dt} = L\frac{di}{dt}.i \Rightarrow U_L = \int Lidi = \frac{1}{2}Li^2 \Rightarrow U_L(t) = \frac{1}{2}L\omega^2 q_m^2 sen^2(\omega t + \varphi)$$

No instante t' em que $U_C(t') = 1/3\ U_L(t')$:

$$\frac{1}{2C} q_m^2 \cos^2(\omega t' + \varphi) = \frac{1}{3}\frac{1}{2} L\omega^2 q_m^2 sen^2(\omega t' + \varphi)$$

$$Mas, \omega^2 = (LC)^{-1}, \text{logo} : \cos^2(\omega t' + \varphi) = \frac{1}{3} sen^2(\omega t' + \varphi) \Rightarrow tg^2(\omega t' + \varphi) = 3 \Rightarrow \omega t' + \varphi = arctg\sqrt{3}$$

A condição inicial do problema é que $q(0) = 0.9q_m = q_m\cos\varphi$, logo:

$$t' = \frac{\text{arctg}\sqrt{3} - \arccos 0.9}{2\pi.60} \approx 1.6x10^{-3} s$$

5B) Considere um circuito RLC em série ligado a uma fonte alternada, com ε (t) = (120 V) sen (377t). Sabendo que a corrente no circuito pode ser descrita por i(t) = (10 A) sen (377t - φ) e que a corrente está atrasada de 60º em relação à tensão, determine a resistência R e a capacitância C, supondo que L = 0.03 H.

a) *6Ω; ~2,4mF*
b) *12Ω; ~0,3mF*
c) *12Ω; ~25mF*
d) *6Ω; ~2,9mF*
e) *nda*

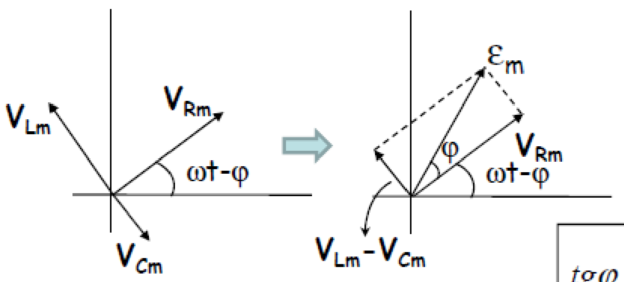
$$\text{Lei das Malhas: } \varepsilon(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$$

$$V_R(t) = Ri_m sen(\omega t - \varphi) = V_{Rm} sen(\omega t - \varphi)$$

$$V_L(t) = \frac{Ldi(t)}{dt} = \omega L i_m \cos(\omega t - \varphi) = X_L i_m \cos(\omega t - \varphi) = V_{Lm} sen\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{\int i(t)dt}{C} = \frac{i_m}{\omega C}\left[-\cos(\omega t - \varphi)\right] = X_C i_m \left[-\cos(\omega t - \varphi)\right] = V_{Cm} sen\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Diagrama de Fasores:



$$\varepsilon_m = \sqrt{V_{Rm}^2 + (V_{Lm} - V_{Cm})^2}$$

$$\varepsilon_m = i_m \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$i_m = \frac{\varepsilon_m}{Z} \Rightarrow \boxed{Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

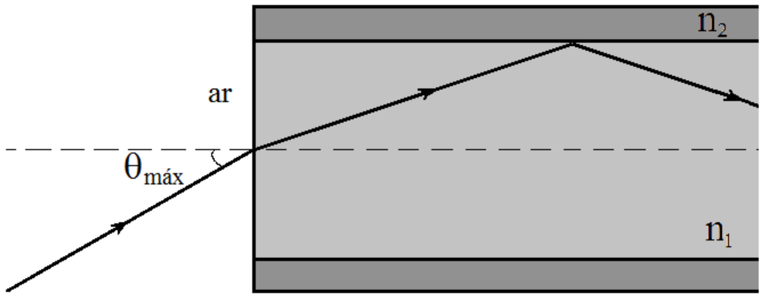
$$\boxed{tg\varphi = \frac{V_{Lm} - V_{Cm}}{V_{Rm}} = \frac{i_m X_L - i_m X_C}{i_m R} = \frac{X_L - X_C}{R}}$$

$$(X_L - X_C) = Rtg\varphi$$

$$Z = \sqrt{R^2 + R^2 tg^2\varphi} = R\sqrt{1 + tg^2\varphi} \Rightarrow R = \frac{Z}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}} = \frac{\varepsilon_m / i_m}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}} = \frac{120/10}{\sqrt{1 + tg^2 60^o}} = \frac{12}{\sqrt{1+3}} = 6\Omega$$

$$X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} = Rtg\varphi \Rightarrow C = \left[\omega(\omega L - Rtg\varphi)\right]^{-1} = \left[377\left(377x0.03 - 6\sqrt{3}\right)\right]^{-1} \approx 2.9x10^{-3} F$$

6A) Uma fibra óptica consiste num núcleo de vidro de índice de refração n_1 circundado por uma película de índice de refração n_2, com $n_2 < n_1$. Suponha um feixe de luz entrando na fibra, proveniente do ar, fazendo um ângulo θ com o eixo da fibra, como mostrado na figura abaixo. Supondo $n_1 = 1,5$ e $n_2 = 1,46$, qual deve ser o maior valor de θ de modo que o feixe possa se propagar na fibra?



a) ~ *19,6°*
b) ~ *30,3°*
c) $\boxed{\sim 20,1^o}$
d) ~ *18,7°*
e) *nda*

Lei de Snell na interface $n_1 - n_2$, condição para reflexão interna total:

$$n_1 sen\theta_C = n_2 sen 90^o \Rightarrow sen\theta_C = \frac{n_2}{n_1}$$

Lei de Snell na interface ar $- n_1$:

$$n_{ar} sen\theta_{máx} = n_1 sen(90^o - \theta_C) \Rightarrow sen\theta_{máx} = n_1 sen\left(90^o - arcsen\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\right) \approx 0.344$$

$$\Rightarrow \theta_{máx} \approx 20.1^o$$

6B) Um feixe de luz parcialmente polarizada pode ser considerado como uma mistura de luz polarizada e luz não-polarizada. Suponha que tal feixe seja enviado para um filtro polarizador e então o filtro seja girado de 360^o, enquanto mantido perpendicular ao feixe. Se a intensidade do feixe transmitido varia por um fator 5 durante a rotação, qual fração da intensidade do feixe incidente está associada com o feixe de luz polarizada?

a) *1/2*
b) *1/3*
c) *2/3*
d) *2/5*
e) *nda*

Pela Lei de Malus, a intensidade do feixe transmitido, correspondente à luz polarizada é:

$\boxed{I_{t,p} = f.(I_0 \cos^2\theta)}$ onde f é a fração de luz polarizada ($0 \le f \le 1$)

A intensidade do feixe transmitido correspondente à luz não-polarizada é:

$$\boxed{I_{t,np} = (1-f)\frac{I_0}{2}}$$

Então:

$$I_{t,T} = f.(I_0 \cos^2\theta) + (1-f)\frac{I_0}{2}$$

Após rotação de 360^0, $0 \le \cos^2\theta \le 1$, logo :

$$I_{t,Tmín} = (1-f)\frac{I_0}{2};\ I_{t,Tmáx} = (1+f)\frac{I_0}{2}$$

Como a intensidade do feixe transmitido (total) varia por um fator 5:

$$\boxed{\frac{I_{t,Tmáx}}{I_{t,Tmín}} = \frac{(1+f)\frac{I_0}{2}}{(1-f)\frac{I_0}{2}} = \frac{(1+f)}{(1-f)} = 5 \Rightarrow f = \frac{2}{3}}$$

7A) Uma partícula esta sujeita à força

$$\vec{F} = -k(r - a\cos\theta)\hat{r} - ka\,\text{sen}\theta\,\hat{\theta}$$

sendo $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ versores em coordenadas esféricas e k e a constantes.

- resposta (b): A força não é radial portanto sistema não pode ser conservativo.

A variação de momento angular é dada por torque $\vec{r} \times \vec{F}$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{r} \times \vec{F} = r\,\hat{r} \times \vec{F} \\ &= -rk(r - a\cos\theta)\hat{r} \times \hat{r} - rka\,\text{sen}\theta\,\hat{r} \times \hat{\theta} \neq 0 \end{aligned}$$

Dai temos que momento angular **não é conservado**.
Como a força não depende nem de tempo nem da velocidade a única condição que resta para verificar é

$$\nabla \times \vec{F} = 0.$$

Em coordenadas esféricas

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

Dai rotacional da força tem forma

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F} &= \hat{r} \times \frac{\partial}{\partial r}\left[-k(r - a\cos\theta)\hat{r} - ka\,\text{sen}\theta\,\hat{\theta}\right] + \\ &+ \frac{1}{r}\hat{\theta} \times \frac{\partial}{\partial \theta}\left[-k(r - a\cos\theta)\hat{r} - ka\,\text{sen}\theta\,\hat{\theta}\right] + \\ &+ \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\hat{\phi} \times \frac{\partial}{\partial \theta}\left[-k(r - a\cos\theta)\hat{r} - ka\,\text{sen}\theta\,\hat{\theta}\right] \\ &= \hat{r} \times [-k\hat{r} - k(r - a\cos\theta)\underbrace{\frac{\partial \hat{r}}{\partial r}}_{0} - ka\,\text{sen}\theta\underbrace{\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial r}}_{0}] + \\ &+ \frac{1}{r}\hat{\theta} \times [-ka\,\text{sen}\theta\,\hat{r} - ka\cos\theta\,\hat{\theta} - k(r - a\cos\theta)\underbrace{\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta}}_{\hat{\theta}} - ka\,\text{sen}\theta\underbrace{\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta}}_{-\hat{r}}] + \\ &+ \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\hat{\phi} \times [-k(r - a\cos\theta)\underbrace{\frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi}}_{\text{sen}\theta\,\hat{\phi}} - ka\,\text{sen}\theta\underbrace{\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi}}_{\cos\theta\,\hat{\phi}}] \\ &= \frac{1}{r}(-ka\,\text{sen}\,\theta)\hat{\theta} \times \hat{r} + \frac{1}{r}(-ka\,\text{sen}\,\theta)\hat{\theta} \times (-\hat{r}) = 0 \end{aligned}$$

Assim concluimos que a força **é conservativa e energia mecânica do sistema é conservada**.

Derivadas de versores em coordenadas esféricas podem ser calculadas a partir das formulas que relacionam versores em coordenadas esféricas e Cartesianas

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \text{sen}\,\theta\cos\phi\,\hat{x} + \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z} \\ \hat{\theta} &= \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\,\text{sen}\,\phi\,\hat{y} - \text{sen}\,\theta\,\hat{z} \\ \hat{\phi} &= -\text{sen}\,\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y} \end{aligned}$$

7B) Uma partícula de massa m encontra-se sob ação da força $\vec{F} = k\frac{\vec{r}}{r^3}$. Calcule a energia da partícula em função módulo de momento an gular $|\vec{L}|$ e módulo de um vetor constante $|\vec{A}|$ definido como

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} + mk\frac{\vec{r}}{r},$$

onde $\vec{p}$ é momento linear da partícula.

- resposta (c): $E = \frac{1}{2mL^2}(A^2 - m^2k^2)$

Consideramos expressão

$$\begin{aligned}
\vec{A} \cdot \vec{A} &= [\vec{p} \times \vec{L} + \frac{mk}{r}\vec{r}] \cdot [\vec{p} \times \vec{L} + \frac{mk}{r}\vec{r}] \\
&= (\vec{p} \times \vec{L}) \cdot (\vec{p} \times \vec{L}) + \frac{2mk}{r}(\vec{p} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} + \frac{m^2k^2}{r^2}r^2 \\
&= p^2L^2 - \underbrace{(\vec{p} \cdot \vec{L})^2}_{0} + m^2k^2 + \frac{2mk}{r}\underbrace{(\vec{r} \times \vec{p})}_{\vec{L}} \cdot \vec{L} \\
&= 2mL^2\left[\frac{p^2}{2m} + \frac{k}{r}\right] + m^2k^2
\end{aligned}$$

A força $\vec{F} = k\frac{\vec{r}}{r^3} = -\nabla U(r)$ onde $U(r) = \frac{k}{r}$ portanto a energia da particula tem valor $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{r}$. Dai concluimos que $A^2 = 2mL^2E + m^2k^2$ e finalmente

$$E = \frac{1}{2mL^2}[A^2 - m^2k^2].$$

8A) Uma conta de massa m desliza sem atrito em um aro circular de raio a. O aro encontra-se num plano vertical que pode girar em torno do diâmeto vertical em velocidade angular constante $\omega = const$ e está sob ação da força gravitacional $g = const$. A conta esta ligada com o ponto mais baixo do aro por um a mola de constante elástica k. A ligação é tal que a força elástica desaparece quando a conta passar por este ponto mais baixo. Se ω_c é a velocidade angular crítica para qual o ponto mais baixo do aro torna-se instável; responda

- resposta (a): Energia mecânica do sistema não é conservada porém Hamiltoniana é uma constante de movimento. Velocidade angular crítica $\omega_c = \sqrt{\frac{g}{a} + \frac{k}{m}}$.

O fato que velocidade angular $\omega = \dot{\phi} = const$ significa que **o sistema mecânico é forçado**. Energia cinética e potencial tem formas

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{ma^2}{2}\left[\dot{\theta}^2 + \omega^2 \mathrm{sen}^2\,\theta\right] \\ U &= -mgz + \frac{k}{2}\left[x^2 + y^2 + (a-z)^2\right] = -(mg+ka)z + const \\ &= -(mg+ka)a\cos\theta + const \end{aligned}$$

A função de Hamilton tem forma

$$\begin{aligned} H &= p_\theta\dot{\theta} - L = ma^2\dot{\theta}^2 - \frac{ma^2}{2}\left[\dot{\theta}^2 + \omega^2\mathrm{sen}^2\,\theta\right] - (mg+ka)a\cos\theta \\ &= \frac{ma^2}{2}\left[\dot{\theta}^2 - \omega^2\mathrm{sen}^2\,\theta\right] - (mg+ka)a\cos\theta \neq T + U \end{aligned}$$

Assim Hamiltoniana **não pode ser interpretada como energia mecânica** do sistema. A Hamiltoniana é conservada

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

pois Lagrangina não depende explicitamente do tempo. A energia mecânica **não é conservada** - precisa exercer um torque externo para manter sistema girando com a velocidade angular constante. A forma final da Hamiltoniana

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ma^2} + U_{eff}(\theta) \qquad U_{eff}(\theta) = -ma^2\left[\frac{\omega^2}{2}\mathrm{sen}^2\,\theta + \left(\frac{g}{a} + \frac{k}{m}\right)\cos\theta\right]$$

A posição de equilibro é dada pelas soluções da equação

$$\frac{d}{d\theta}U_{eff} = -ma^2\,\mathrm{sen}\,\theta\left[\omega^2\cos\theta - \left(\frac{g}{a} + \frac{k}{m}\right)\right] = 0$$

Temos portanto $\theta = 0$ (estável ponto de equilibro), $\theta = \pi$ (inestável ponto de equilibro). A segunda equação $\cos\theta = \frac{1}{\omega^2}(\frac{g}{a} + \frac{k}{m})$ tem solução para $\frac{1}{\omega^2}(\frac{g}{a} + \frac{k}{m}) \leq 1$. Esta solução aparece quando $\omega \geq \omega_c \equiv \sqrt{\frac{g}{a} + \frac{k}{m}}$. Para $\omega = \omega_c$ o ponto $\theta = 0$ deixa de ser estável ponto de equilibro.

8B) Considere movimento de uma partícula de massa m no plano $z = 0$ desctito por uma função Lagrangiana

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{onde} \qquad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

e $c = const$ é velocidade da luz. Calcule constantes de movimento para este sistema e responda:

- resposta (d): Momento canônico $p_\theta = \frac{mr^2\dot{\theta}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ e Hamiltoniana $H = c\sqrt{p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + m^2c^2} + \frac{k}{r}$ são constantes de movimento

Lagrangiana

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{c^2}} - \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

em coordenadas polares tem forma

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2}{c^2}} - \frac{k}{r}$$

Momentos canônicos

$$p_r \equiv \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{m\dot{r}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{mr^2\dot{\theta}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

onde $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2$. Devido a θ de ser uma coordenada ignorável **o momento canônico p_θ é conservado**. Hamiltoniana tem forma

$$\begin{aligned} H &= p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - L \\ &= \frac{m\dot{r}^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{mr^2\,\dot{\theta}^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{k}{r} \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left[\frac{v^2}{c^2} + 1 - \frac{v^2}{c^2}\right] + \frac{k}{r} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{k}{r} \end{aligned}$$

Precisamos eliminar velocidades em favor de momentos. Considere uma combinação

$$p^2 \equiv p_r^2 + \left(\frac{p_\theta}{r}\right)^2 = \frac{m^2v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Rezolvendo para v^2 temos $v^2 = \frac{c^2p^2}{p^2+m^2c^2}$. A função Hamiltoniana tem forma final

$$H = c\sqrt{p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + m^2c^2} + \frac{k}{r}$$

Esta é outra constante de movimento pois $\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

9A) A relação fundamental de um sistema na representação da entropia é dada por $s = uv - 1/(uv)$, onde s, u e v são a entropia, energia interna e volume molar, respectivamente. Escreva a equação de estado mecânica para este sistema, ou seja, determine a pressão em função da temperatura e do volume molar.

a) $P = vT$

b) $P = v/T$

c) $P = 1/\sqrt{\left(\frac{1}{T} - v\right) v^3}$ para $v < 1/T$

d) $P = 1/\sqrt{\left(\frac{1}{T} - v\right)}$ para $v < 1/T$

e) Nenhuma das alternativas anteriores.

A entropia é dada por $s = uv - \frac{1}{uv}$.
Usando as relações

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)_v = v + \frac{1}{vu^2}$$

$$\frac{P}{T} = \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_u = u + \frac{1}{uv^2}$$

$$P = \frac{u}{v} \Rightarrow \left(\frac{1}{T} - v\right) = \frac{1}{vu^2}$$

Obtemos a pressão como

$$P = \left[\left(\frac{1}{T} - v\right) v^3\right]^{\frac{-1}{2}} \quad \text{para } v < \frac{1}{T}$$

9B) Considere um sistema particular cujo calor latente de vaporização seja constante, igual a l, ao longo da curva de coexistência entre as fases líquida e vapor. Um mol dessa substância encontra-se na fase mista, contido num recipiente de volume V_0, na temperatura T_0 e pressão P_0. O sistema é aquecido tal que sua pressão passa a ser $3P_0$. Nessas condições, determine a fração molar da fase gasosa, n_G, para esse novo valor de pressão. Assuma que a fase gasosa possa ser tratada como um gás ideal monoatômico.

a) $n_G = 1$

b) $n_G = \frac{3P_0V_0}{RT_0}$

c) $n_G = \frac{P_0V_0}{RT_0}$

d) $n_G = \frac{3P_0V_0}{R}\left[\frac{1}{T_0} - \frac{R}{l}\ln(3)\right]$

e) Nenhuma das alternativas anteriores.

Na temperatura T_0

$$P_0V_i = RT_0n_g \approx P_0V_0$$
$$n_g = {P_0V_0}/{RT_0}$$
$$\frac{dP}{dT} = \frac{l}{T\Delta v}$$
$$n_l = 1 - \frac{P_0V_0}{RT_0}$$

Depois que a pressão passa a ser $3P_0$, $3P_0V_0 = n_g'RT$

$$\frac{dP}{dT} = \frac{l}{T\frac{RT}{P}} \rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{l}{RT^2}dT \rightarrow ln(3) = -\frac{l}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)$$
$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} - \frac{R}{l}ln(3)$$

Logo

$$n_g' = \frac{3P_0V_0}{RT} = \frac{3P_0V_0}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{R}{l}ln(3)\right)$$

10A) O hamiltoniano de um sistema de N partículas localizadas, cada qual com spin S_i $(i = 1,2,\cdots,N)$ é dado por $H = D\sum_{i=1}^{N}(S_i - 1)^2$, onde S_i pode assumir os valores 0 e 1 e $D > 0$. Determine a entropia do sistema se a energia total é U, onde $u = U/N$ é a energia por partícula e $\varepsilon = u/D$.

a) $s(\varepsilon) = -k_B[\varepsilon\, ln(\varepsilon) + (1-\varepsilon)\, ln(1-\varepsilon)]$

b) $s(\varepsilon) = -k_B ln(\varepsilon)$

c) $s(\varepsilon) = -k_B(1-\varepsilon)$

d) $s(\varepsilon) = k_B\,(1-\varepsilon)\, ln(1-\varepsilon)$

e) Nenhuma das alternativas anteriores.

$H = D\sum_{i=1}^{N}(S_i - 1)^2$, com $S_i = 0,1$

$$S_i = 0 \ , \ \ E_0 = D$$

$$S_i = 1 \ , \ \ E_0 = 0$$

$$U = N_0 D \ , \qquad N_0 + N_1 = N$$

$$\Omega(U,N) = \frac{N!}{N_0!\,N_1!} = \frac{N!}{\left(\frac{U}{D}\right)!\left(N - \frac{U}{D}\right)!}$$

Utilizando a aproximação de Stirling $\ln(x) \approx xln(x) - x$

$$S(U,N) = k_B ln\Omega(U,N)$$

$$s = \frac{S(U,N)}{N} = -k_B\left[\frac{u}{D} ln\left(\frac{u}{D}\right) + \left(1 - \frac{u}{D}\right) ln\left(1 - \frac{u}{D}\right)\right]$$

onde $u = \frac{U}{N}$. e $\varepsilon = u/D$

10B) Considere um sistema de N partículas clássicas não-interagentes. Os estados de energia possíveis para cada partícula são dados por $\varepsilon_n = (n-1)\varepsilon$ e são n degenerados ($\varepsilon > 0; n = 1,2,3,\cdots$). Determine a energia livre de Helmholtz por partícula em função da temperatura, com $\beta = 1/k_B T$.

a) $f(T) = -2\varepsilon e^{\beta\varepsilon}$

b) $f(T) = -2\varepsilon + \frac{2}{\beta} ln\left(e^{\beta\varepsilon} - 1\right)$

c) $f(T) = -2\varepsilon/\beta$

d) $f(T) = \frac{2}{\beta} ln\left(e^{\beta\varepsilon} - 1\right)$

e) Nenhuma das alternativas anteriores.

Temos que $\varepsilon_n = (n-1)\varepsilon$, com $n = 1,2,\cdots$

$Z = {Z_1}^N$, onde $Z_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-\beta\varepsilon_n} = e^{\beta\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta\varepsilon n}$

$$Z_1 = -e^{\beta\varepsilon} \frac{d}{d(\beta\varepsilon)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon n} = \left(\frac{e^{\beta\epsilon}}{e^{\beta\varepsilon} - 1}\right)^2$$

$$f(T) = -\frac{1}{\beta}\frac{1}{N}\ln(Z) = -2\varepsilon + \frac{2}{\beta} ln\left(e^{\beta\varepsilon} - 1\right)$$