Gabarito (Exame 2010.1)

1 - A) Alternativa (d)

O fluxo do campo elétrico através de uma superfície Gaussiana qualquer é $\phi = \oint \vec{E}\,\hat{n}\,dA$

A interseção da superfície Gaussiana com o plano carregado é uma circunferência de raio $r = \sqrt{R^2 - x^2}$, que compreende uma área $A = \pi r^2$.

O campo produzido pelo plano carregado tem módulo $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, orientado perpendicularmente ao plano em ambos os lados.

Portando o fluxo de campo elétrico é

$\phi = \pi (R^2 - x^2)\,\sigma/\varepsilon_0$.

1 - B) Alternativa (c)

Utilizando a fórmula de Biot-Savart $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} I \dfrac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$.

Os segmentos restos de fio não produzem campo B em P, pois $d\vec{l} \| \hat{r}$.

O segmento circular produz campo em P, cujo módulo é

$B = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I}{R^2}\int dl = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I}{R^2}\int_0^{\theta} R\,d\theta' = \dfrac{\mu_0 I\,\theta}{4\pi R}$, orientado para dentro do plano da página.

2 - A) Alternativa (a)

Considere uma onda luminosa descrita pelo campo $E = E_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$, com $\vec{k} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\hat{k}$, tal que $\vec{k}\cdot\vec{r} = \dfrac{2\pi}{\lambda} x$. A relação entre os índices de refração dos materiais é $n_{ar} < n_{filme} < n_{vidro}$. A onda refletida sofre uma inversão de fase na interface ar/filme, enquanto a onda refratada no filme sofre uma inversão de fase na interface filme/vidro. Para minimizar a reflexão luminosa, a diferença de caminho entre o raio de luz que é refletido na interface ar/filme e o raio de luz que é refletido na interface filme/vidro deve ser destrutiva, portanto

$\dfrac{2\pi}{\lambda} 2l = \pi \rightarrow l = \dfrac{\lambda}{4}$.

2 - B) Alternativa (c)

Para uma onda plana que se propaga na direção x com vetor de onda $\vec{k} = k\,\hat{x}$, no vácuo, vale a relação

$\vec{B} = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}\,\hat{k} \times \vec{E} = \dfrac{\hat{k} \times \vec{E}}{c}$.

À esquerda do plano condutor, a onda incidente (I) tem vetor de onda $\vec{k} = k\,\hat{x}$, mas a onda refletida (R) tem vetor de onda $\vec{k} = -k\,\hat{x}$.

O campo resultante $\vec{E}=\vec{E}_I+\vec{E}_R$, tangencial ao plano do condutor, deve ser nulo. Portanto o campo $\vec{E}_R$, da onda refletida, sofre uma mudança de fase de π.

Por causa da relação $\vec{B}=\frac{\hat{k}\times\vec{E}}{c}$, o campo magnético resultante é $\vec{B}=\vec{B}_I+\vec{B}_R=2\frac{\hat{k}\times\vec{E}}{c}$.

Portanto os campos imediatamente à esquerda do condutor satisfazem

$$|\vec{E}|=0 \quad \text{e} \quad |\vec{B}|=\frac{2E_0}{c}\cos(\omega t)$$

3 - A) Alternativa (c)

Maneira simples: Levando em conta o princípio da superposição dos campos, admitimos que a configuração do problema é equivalente a um fio sem cavidade, percorrido por uma densidade de corrente uniforme $\vec{J}_1=J\hat{z}$, e um fio imaginário que ocupa o volume da cavidade , mas contém uma densidade de corrente $\vec{J}_2=-J\hat{z}$. Utilizando a fórmula de Ampère para o primeiro fio, obtemos

$$\oint \vec{B}_1 d\vec{l}=\mu_0 I=\mu_0(J_1\pi r^2)=\mu_0\left(\frac{I}{\pi R^2}\right)\pi r^2$$

$$2\pi r B_1=\mu J_1\pi r^2$$

$B_1=\frac{\mu_0 J_1 r}{2}$. Vetorialmente temos $\vec{B}_1=\frac{\mu_0 J r}{2}\hat{\phi}$, no sentido anti-horário.

Para o segundo fio, assumindo o ponto x = b como origem, temos

$\vec{B}_2=\frac{-\mu_0 J r_b}{2}\hat{\phi}$, onde $\vec{r}_b$ é o vetor posição tendo o eixo x=b como origem.

Mas sobre a reta x=b, temos $r_b=0$, portanto $B_2=0$ nesse ponto e o campo resultante no eixo da cavidade cilindrica é $\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2=\frac{\mu_0 J b}{2}\hat{y}$.

Maneira geral: Somando os campos, para qualquer ponto dentro da cavidade temos

$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2=\frac{\mu_0 J}{2}\left(r_1\hat{\phi}_1-r_2\hat{\phi}_2\right)$. Mas $r_1\hat{\phi}_1=\hat{k}\times\vec{r}_1$ e $r_2\hat{\phi}_2=\hat{k}\times\vec{r}_2=\hat{k}\times(\vec{r}_1-b\hat{x})$, tal que

$\vec{B}=\frac{\mu_0 J}{2}\hat{k}\times\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)=\frac{\mu_0 J}{2}\hat{k}\times\left(\vec{r}_1-\vec{r}_1+b\hat{x}\right)=\frac{\mu_0 J b}{2}\hat{k}\times\hat{x}=\frac{\mu_0 J b}{2}\hat{y}$ em qualquer ponto dentro da cavidade.

3 - A) Alternativa (e)

Usando a fórmula de Snell $sen[\theta]n_{AR}=sen[\theta'(\lambda)]n(\lambda)$, derivamos ambos os lados com relação ao comprimento de onda λ

$$\frac{d}{d\lambda}\left(sen[\theta]n_{AR}\right)=\frac{d}{d\lambda}\left(sen[\theta'(\lambda)]n(\lambda)\right)$$

$$0=sen'[\theta']\frac{d\theta'}{d\lambda}n(\lambda)+sen[\theta']\frac{dn(\lambda)}{d\lambda}$$

$$d\theta'=\frac{\tan[\theta']}{n}\frac{dn(\lambda)}{d\lambda}d\lambda \quad .$$

O espalhamento angular é dado por $|d\theta'|$.

4- A) Alternativa (d)

Aplicando a conservação de energia para encontrar a velocidade *v* na base do arco.

$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ logo, $v = \sqrt{2gh}$

Onde vamos expressar a altura *h* em termos do ângulo inicial θ_0:

$h = L - Lcos\theta_0 = L(1 - cos\theta_0)$, então: $v = \sqrt{2gL(1 - cos\theta_0)}$

Quando a massa está na base do pêndulo, as únicas forças que agem em *m* são a tração e a força peso, então:

$T - mg = ma_y$ onde $a_y = \frac{v^2}{L} = 2g(1 - cos\theta_0)$ então:

$T = m(g + a_y) \rightarrow T = (3 - 2cos\theta_0)mg$

4- B) Alternativa (b)

A aceleração da caixa é provocada pela força de atrito estático f_e. Esta força exerce um torque anti-horário em relação ao centro de massa da caixa. A única outra força que exerce um torque em relação ao centro de massa da caixa é a força normal f_n, sendo que o maior torque de equilíbrio que esta força pode proporcionar ocorre quando estiver aplicada à extremidade traseira da caixa.

A somatória das forças na direção vertical é:

$\sum F_y = ma_{cmy} \rightarrow F_n - mg = 0$ ou seja, $F_n = mg$

E na direção do movimento:

$\sum F_x = ma_{cmx} \rightarrow f_e = ma$

Na condição de equilíbrio $\sum \tau_{cm} = 0$

$f_e\frac{h}{2} - F_n\frac{L}{2} = 0 \rightarrow ma\frac{h}{2} - mg\frac{L}{2} = 0$ ou seja, $a = \frac{L}{h}g$

5- A) Alternativa (a)

Considerando a equação geral do efeito Doppler para fonte e observador em movimento: $f = f_0\frac{\left(1 \pm \frac{u}{v}\right)}{\left(1 \mp \frac{V}{v}\right)}$, onde *u* é a velocidade o observador, *V* a velocidade da fonte e *v* a velocidade da onda. Para a situação descrita no problema temos que a freqüência f_2 que chega no submarino 2 emitida pelo submarino 1 é dada por:

$f_2 = f_{10}\frac{(1 - V_2/V_{som})}{(1 - V_1/V_{som})}$ (observador 2 e fonte 1, ambos em movimento) e por sua vez a freqüência f_{21} que retorna para o submarino 1 refletida pelo submarino 2 é dada por:

$f_{12} = f_2\frac{(1 + V_1/V_{som})}{(1 + V_2/V_{som})}$ (observador 1 e fonte 2, ambos em movimento)

Portanto, $f_{12} = f_{10}\frac{(1 - V_2/V_{som})}{(1 + V_2/V_{som})}\frac{(1 + V_1/V_{som})}{(1 - V_1/V_{som})}$. Isolando-se V_1 nesta expressão temos que:

$$V_1 = \frac{\left[\frac{f_{12}}{f_{10}}\frac{(1 + V_2/V_{som})}{(1 - V_2/V_{som})} - 1\right]}{\left[\frac{f_{12}}{f_{10}}\frac{(1 + V_2/V_{som})}{(1 - V_2/V_{som})} + 1\right]}.V_{som}$$

5- B) Alternativa (e)

O sistema descrito é equivalente a um tubo com uma extremidade aberta e outra fechada. Nesta situação, sabe-se que os harmônicos de ressonância ocorrem para as freqüências $f_n = \frac{V_{som}}{\lambda_n}$ onde λ_n são os comprimentos de onda do som e estão relacionados com a profundidade *H* do poço pela relação

$H = \frac{n\lambda_n}{4}$ com n = *1,3,5,...* Portanto, temos que $f_n = \frac{nV_{som}}{4H}$ com n = *1,3,5,...* ou seja, este sistema apresenta apenas harmônicos ímpares.
Então escrevemos $f_A = \frac{nV_{som}}{4H}$ e $f_B = \frac{(n+2)V_{som}}{4H}$, onde:
$f_B - f_A = \frac{(n+2)V_{som}}{4H} - \frac{nV_{som}}{4H} = \frac{V_{som}}{2H}$ ou seja, $H = \frac{V_{som}}{2(f_B - f_A)}$.

6- A) Alternativa (c)
Utilizando a equação Bernoulli para a tubulação tem-se:
$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \rightarrow \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2 - P_1$
Para um fluido em equilíbrio temos que a pressão aumenta com a profundidade no fluido pela relação $P_1 = P_2 + \bar{\rho}gh \quad \rightarrow P_2 - P_1 = -\bar{\rho}gh$, então:
$v_1^2 = v_2^2 - \frac{2\bar{\rho}}{\rho}gh$
Aplicando a lei da continuidade, $v_2 = \frac{A}{a}v_1$, resulta:
$v_1^2\left(\frac{A^2}{a^2} - 1\right) = \frac{2\bar{\rho}}{\rho}gh$, ou seja, $v_1 = a\sqrt{\frac{2\bar{\rho}gh}{\rho(A^2 - a^2)}}$.

6- B) Alternativa (b)
O menor tempo entre duas passagens consecutivas sobre o mesmo ponto da Terra deve ser aproximadamente igual ao período da órbita da estação espacial. Utilizando a Terceira Lei de Kepler, que relaciona o quadrado do período com o cubo da distância ao centro da Terra:
$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T}r^3$, onde $r = h + R_T$ e pela Lei da Gravitação de Newton, nas proximidades da superfície da Terra $GM_T = gR_T{}^2$. Então:
$T^2 = \frac{4\pi^2}{gR_T{}^2}(R_T + h)^3 = \frac{4\pi^2}{10(6\times10^6)^2}(6{,}4\times10^6)^3$
$T \approx \frac{2}{6\times10^6}(16\times10^9) \approx 5.300\ s\ \approx 90\ min.$

7- A) Alternativa (a)
A variação de entropia é dada por $\Delta S = \int ds$, onde $ds = \frac{dQ}{T}$.
I (correta) - Para a água da chaleira $dQ = mcdT$, portanto: $\Delta S = mc.\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$.
$\Delta S = 4{,}2\times10^3.\ln\left(\frac{300}{373}\right) \approx -840J/K$. Sabe-se que ln ($x$ < 1) < 0.
II (correta) - Para a água da piscina, como ela é um reservatório térmico, a sua temperatura não varia, então: $\Delta s = \frac{\Delta Q}{T}$, onde $\Delta Q = mc\Delta T$, então:
$\Delta S = \frac{mc\Delta T}{T} = \frac{4{,}2\times10^3(73)}{300} = 1022J/K.$
III (incorreta) - Temos que $\Delta S_{universo} = \Delta S_{chaleira} + \Delta S_{piscina}$, então:
$\Delta S_{universo} = 1022 - 840 = 182J/K \ > 0$. O que está de acordo com a segunda lei da termodinâmica é esperado para um processo irreversível.
Como $\Delta S_{universo}$ não pode ser menor que zero previamente sabia-se que $|\Delta S_{chaleira}| < |\Delta S_{piscina}|$.

7- B) Alternativa (b)

I (incorreta) - O coeficiente de desempenho de um refrigerador é dado pela razão entre a quantidade de calor extraída do reservatório frio e o trabalho realizado sobre o sistema $K_p = \frac{|Q_f|}{|W|}$, sendo que $|W| = |Q_q| - |Q_f|$, onde Q_q é a quantidade de calor rejeitada para o reservatório quente. Então tem-se que:

$|Q_f| = K_p|W| = 1000\,J$ e $|Q_q| = |Q_f| + |W| = 1200\,J$

II (inccorreta) - Na expansão livre de um gás ideal termicamente isolado a energia interna não varia, pois não há troca de calor com o meio externo e não há realização de trabalho pelo gás. Como a temperatura do gás não varia neste processo, conclui-se que a energia interna de um gás ideal depende unicamente da temperatura.

III (correta) - Usando a conservação de energia do topo do plano a uma altura *h* (onde só existe energia potencial gravitacional) até a sua base (onde só existe energia cinética), tem-se:

Para deslizamento: $\frac{1}{2}M{v_{CM}}^2 = mgh \rightarrow v_{CM} = \sqrt{2gh}$

Para rolamento:

$\frac{1}{2}M{v_{CM}}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = mgh$, onde $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$ e $\omega^2 = \frac{v_{CM}}{R}$, logo, $v_{CM} = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$

O que faz com que o cilindro chegue primeiro se apenas deslizar.

8 - A) A afirmativa (i) é verdadeira, as demais são falsas.

Igualando a força centrípeta à força elétrica ($m_e v^2/r = Ke^2/r^2$) *e usando o critério das órbitas de Bohn temos,*

$2\pi r = n\,\lambda_e = n\,h/p = n\,(h/m_e v) \rightarrow r^2 = n^2\,[h/(2\pi\,m_e v)]^2 = n^2\,(h/2\pi)^2\,(r/m_e Ke^2)$

$r = n^2\,(h/2\pi)^2\,(1/m_e Ke^2) = n^2\,a_0$.

Para o estado fundamental (n=1), $r = a_0 \approx 5{,}3\times10^{-11}\,m$.

A energia do elétron pode ser escrita como,

$E_{tot}(n) = E_{cin} + E_{pot\ elétrica} = ½\,m_e v^2 - Ke^2/r = -½\,Ke^2/r = -1/n^2\,(Ke^2/2a_0) = -(2{,}17\text{x}10^{-18}/\,n^2)$ J .

A energia do primeiro estado excitado (n=2) é, $E_{tot}(2) \approx -5{,}44\times10^{-19}\,J$.

A diferença entre as energias do segundo estado excitado (n=3) e o estado fundamental (n=1) é,

$\Delta E = E(3) - E(1) = -2{,}4\text{x}10^{-18} + 2{,}17\text{x}10^{-18}$ ▪ $1{,}9\text{x}10^{18}$ J

e o comprimento de onda do fóton emitido nesta transição é $\lambda \approx 102{,}6\,nm$

A afirmativa (i) é verdadeira, as demais são falsas.

8 - B) Alternativa (e)

Trata-se de um problema de efeito fotoelétrico. A energia do fóton incidente (E_f) é igual à soma da função trabalho do metal (w) e da energia cinética do elétron arrancado do catodo,

$E_f = hc/\lambda = w + ½\,m_e\,v_e^2 \rightarrow$ $w = \frac{hc}{\lambda} - \frac{m_e v_e^2}{2} = 2{,}8\,eV - 1{,}5\,eV \approx 1{,}3\,eV$.

No segundo caso, a energia cinética do elétrons arrancados é $½\,m_e\,v_{e'}^2 = 0{,}11$ eV.

O comprimento de onda do fóton necessário para produzir elétrons com esta energia cinética é,

$$\lambda' = \frac{hc}{\left(W + \frac{1}{2}m_e v_{e'}^2\right)} \approx 904\,nm \quad .$$

9 - A) Alternativa (e)

O fluxo de radiação de corpo negro pela superfície da esfera é $F = \sigma T^4$. Para uma esfera de raio R, a potência total emitida por sua superfície é $P = 4\pi R^2 F$ e o fluxo observado a uma distância d é $f(d) = P / (4\pi d^2)$.

A potência emitida é $P = 4\pi d^2 f(d) \approx 1{,}1\times10^{27}\,W$.

A temperatura do corpo negro é $T = \left(\frac{F}{\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{P}{4\pi\sigma R^2}\right)^{1/4} \approx 7.000\,K$.

O comprimento de onda onde a emissão de corpo negro é máxima é obtido a partir da lei do deslocamento de Wien, $\lambda_{max}\, T = 2{,}9x10^{-3}$ K m.

Obtemos $\lambda_{max} = 2{,}9\times10^{-3}/T \approx 414\,nm$.

9 - B) Alternativa (e)

A função de Planck para emissão de corpo negro é monotônica com a temperatura, $dB_\lambda(T)/dt>0$ para qualquer λ. Ou seja, um corpo negro com temperatura maior emite mais fluxo em qualquer comprimento de onda. Usamos a lei do deslocamento de Wien para perceber que O corpo negro 1 é mais quente do que o 2, que por sua vez é mais quente do que o corpo negro 3. Uma vez que as esferas tem mesmo tamanho, a única forma da esfera 3 (a mais fria) ter um fluxo observado maior do que as demais em uma dada faixa de comprimentos de onda é estando a uma distância menor que as outras.

Assim, a esfera mais próxima é a esfera 3.

A temperatura de corpo negro da esfera 2 é obtida usando a lei do deslocamento de Wien a partir do comprimento de onda onde a radiação emitida é máxima,

$T = 2{,}9\times10^{-3}/\lambda_{max} \approx 10.000\mathrm{K}$.

10 - A) Alternativa (a)

O máximo momento é dado pelo momento de Fermi,

$p_F = \frac{h}{2}\left(\frac{3\mathrm{n}_e}{\pi}\right)^{1/3} \approx 1{,}4\times10^{-24}\,N.s$.

Como o gás é não relativístico, a energia correspondente ao momento máximo (energia de Fermi) é,

$E_F = \frac{p^2}{2m_e} \approx 1{,}1\times10^{-18}\,J \approx 7{,}1\,eV$.

10 - B) Alternativa (c)

Para uma fonte em repouso em relação ao observador, uma distância entre a fonte e o observador contendo um conjunto de N comprimentos de onda $\boldsymbol{\lambda_0}$ *será percorrida no intervalo de tempo t_0, tal que $N\boldsymbol{\lambda_0} = ct_0$. Para uma fonte se movendo com relação ao observador, no intervalo de tempo t que ela leva para emitir N comprimentos de onda **λ’** a fonte se desloca de uma distância vt. Assim, a onda terá sido esticada em uma distância ct+vt = (c+v)t = N**λ’.** Dividindo esta expressão pela anterior encontramos,*

$\boldsymbol{\lambda'}/\boldsymbol{\lambda_0} = (1 + v/c)\, t/t_0$

Se o movimento da fonte é relativístico, o tempo medido no referencial da fonte t é maior que o tempo medido no referêncial em repouso $t = \gamma t_0$ *. Logo, a razão $\boldsymbol{\lambda'}/\boldsymbol{\lambda_0}$ pode ser escrita,*

$$\frac{\lambda'}{\lambda_0} = \left(1+\frac{v}{c}\right)\sqrt{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}.$$