UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICA E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
Exame de Seleção – Primeiro Semestre 2011

Nome do Candidato: ____

Instruções: A prova consta de 20 (vinte) questões, sendo que o candidato deve escolher entre as opções A **ou** B de mesma numeração, totalizando 10 (dez) questões a serem respondidas. Os respectivos cálculos devem ser apresentados exclusivamente nos espaços destinados a cada questão escolhida (frente e verso), de maneira objetiva, **sem rasuras**.

ATENÇÃO: Não serão aceitas respostas sem uma justificativa coerente das alternativas assinaladas.

Em caso do candidato responder as opções A e B de uma mesma numeração, será considerada apenas a opção A.

1A) Uma estrutura rígida triangular é construída com três hastes iguais e seu plano é vertical, com a base na horizontal. Nos dois outros lados estão enfiadas duas bolinhas idênticas de massa *m*, atravessadas por um arame rígido e leve *AB*, de modo que podem deslizar sobre as hastes com atrito desprezível, mantendo sempre o arame na horizontal. As duas bolinhas também estão ligadas por uma mola leve de constante elástica *k* e comprimento relaxado l_0. Se soltarmos o sistema na situação em que a mola está relaxada, determine o valor de *l* (comprimento da mola) para que o sistema fique em equilíbrio e o maior valor de *l* no movimento subsequente.

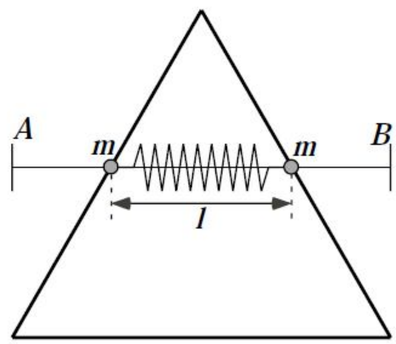
a) $l_0 + mg/k,\ \ l_0 + 2mg/k$.

b) $l_0 + \sqrt{3}mg/k,\ \ l_0 + 2\sqrt{3}mg/k$.

c) $l_0 + \sqrt{2}mg/k,\ \ l_0 + 2mg/k$.

d) $l_0 + 2\sqrt{2}mg/k,\ \ l_0 + 4\sqrt{2}mg/k$.

e) $l_0 + 2\sqrt{3}mg/k,\ \ l_0 + 4\sqrt{3}mg/k$.



1B) Um pequeno cubo de massa *m* é colocado no interior de um funil a uma distância *r* do seu eixo vertical de simetria. A parede do funil faz um ângulo θ com a horizontal e o coeficiente de atrito estático entre o funil e o cubo é μ. Suponha que o funil possua um ângulo θ menor que o ângulo limite para que o corpo não deslize quando o funil está parado. Se o funil for posto para girar em torno de seu eixo vertical de simetria com uma frequência de rotação *b*, calcule o valor máximo dessa frequência para que o cubo não comece a deslizar para cima.

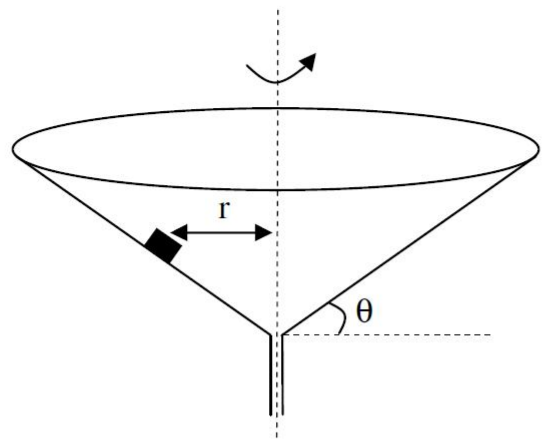
a) $b = \sqrt{\dfrac{g}{4\pi^2 r}\dfrac{(\mu\cos\theta + sen\theta)}{(\cos\theta - \mu sen\theta)}}$

b) $b = \sqrt{\dfrac{g}{4\pi^2 r}\dfrac{(\cos\theta - \mu sen\theta)}{(\mu\cos\theta - sen\theta)}}$

c) $b = \sqrt{\dfrac{g}{4\pi^2 r}\dfrac{(\mu\cos\theta + sen\theta)}{(\cos\theta + \mu sen\theta)}}$

d) $b = \sqrt{\dfrac{g}{4\pi^2 r}\dfrac{(\mu\cos\theta + sen\theta)}{(\mu sen\theta - \cos\theta)}}$

e) $b = \sqrt{\dfrac{g}{4\pi^2 r}\dfrac{(\cos\theta + \mu sen\theta)}{(\mu\cos\theta - sen\theta)}}$



2A) Qual é o ângulo máximo de espalhamento elástico (θ_M) de uma partícula alfa por um nêutron em repouso (considere a massa da partícula alfa quatro vezes maior que a do nêutron)? (Faça o cálculo não relativístico)

a) $\cos\theta_M = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$.

b) $\cos\theta_M = 0$.

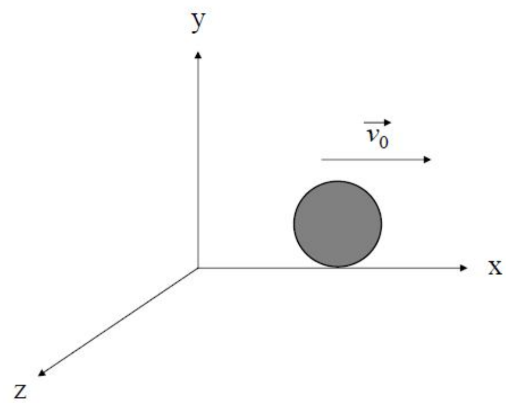
c) $\cos\theta_M = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

d) $\cos\theta_M = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

e) $\cos\theta_M = \dfrac{\sqrt{7}}{8}$.

2B) Um jogador atira uma bola de boliche de massa M = 1 Kg e raio R = 10 cm $\left(I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2 \right)$, com uma velocidade inicial $\vec{v}_0 = 5\hat{i}$ m/s e $\vec{\omega}_0 = -10\ \hat{k}$ rad/s. O coeficiente de atrito cinético entre a bola e o chão é $\mu = 0{,}2$. Quanto tempo, após o lançamento, a bola precisa para começar a rolar sem deslizar?

a) 5/4 s.
b) 3/5 s.
c) 4/7 s.
d) 2/9 s.
e) 3/4 s.



3A) Suponha que 1,0 Kg de água a 7º C seja colocada em contato térmico com 1,0 Kg de água a 47º C. Qual a variação total da entropia? (dado o calor específico da água constante e igual a c = 4190 J/Kg.K nesse intervalo de temperatura).

a) $c \ln(15/14)$.

b) $-c \ln(15/14)$.

c) 0.

d) $-c \ln(224/225)$.

e) $c \ln(47/7)$.

3B) Duas ondas senoidais propagam-se ao longo de uma corda em sentidos opostos. Cada onda tem amplitude de 0,6 cm e a distância entre duas cristas em ambas as ondas é 4,0 cm. A velocidade de propagação na corda é de 200 cm/s. Considere as fases iniciais das ondas como sendo nulas. Determine a expressão que descreve a onda resultante.

a) $y(x,t) = 0{,}6 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cos(200\pi t)$ cm.

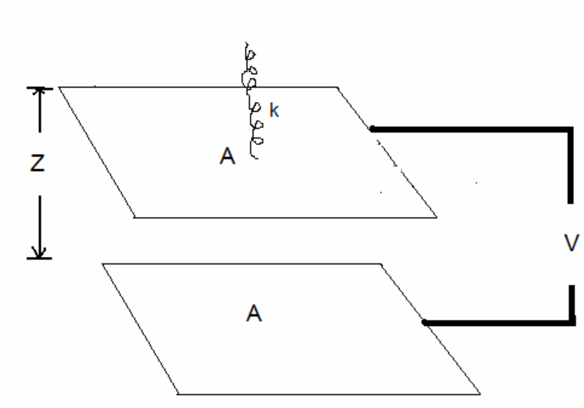
b) $y(x,t) = 0{,}6 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right) \cos(100\pi t)$ cm.

c) $y(x,t) = 1{,}2 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \text{sen}(200\pi t)$ cm.

d) $y(x,t) = 0{,}6 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right) \cos(200\pi t)$ cm.

e) $y(x,t) = 1{,}2 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cos(100\pi t)$ cm.

4A) As duas placas paralelas do capacitor mostrado na figura abaixo tem área A. A placa inferior repousa sobre um suporte fixo e a superior esta suspensa por uma mola de constante elástica k, colocada no centro da placa. Quando descarregadas, as placas estão a uma distância z_0. Uma bateria ligada ao capacitor produz uma diferença de potencial V entre as placas. Isso faz a distância entre elas diminuir para z, sendo que elas continuam paralelas. Obtenha uma expressão que relacione a distância z com o módulo da diferença de potencial V.



(A) $V = \sqrt{\dfrac{2k(z_0 - z)z^2}{\varepsilon_0 A}}$

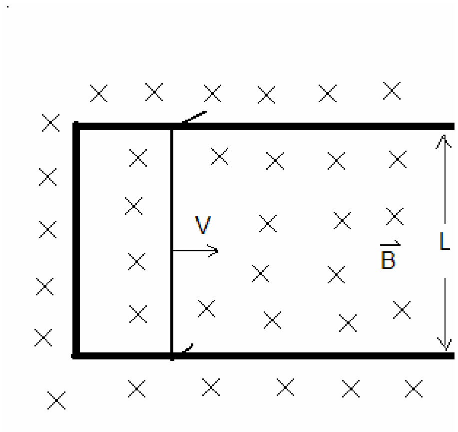
(B) $V = \dfrac{2k(z^3 - z_0^3)}{\varepsilon_0 A}$

(C) $V = \sqrt{\dfrac{2k^2(z)z}{\varepsilon_0 A}}$

D) $V = \sqrt{\dfrac{4k(z - z_0)^3}{\varepsilon_0 A}}$

E) nenhuma das anteriores.

4B)Um fio deslizante de massa M está apoiado sobre uma espira retangular com lado a, como mostrado na figura abaixo. Um campo magnético $\vec{B}$ perpendicular ao plano da espira está entrando no plano da página. O fio está inicialmente com velocidade V_0 para a direita. Não existe atrito entre o fio e a espira, e a resistência elétrica da própria espira é desprezível. A resistência do fio é R. Encontre a distância total percorrida pelo fio até ele atingir o repouso.



A) $x = \infty$

B) $x = \dfrac{RV_0M}{B^2L^2}$

C) $x = \dfrac{2V_0RM}{\pi B^2L^2}$

E) $x = \dfrac{RV_0}{BL}\exp\left(B^2L^2/MR\right)$

D) Nenhuma das anteriores.

5 A) Uma esfera isolante maciça, de raio R, possui carga Q uniformemente distribuída por todo o seu volume. Calcule o módulo da diferença de potencial entre o centro e a superfície da esfera.

A) $\dfrac{Q}{\varepsilon_o R}$

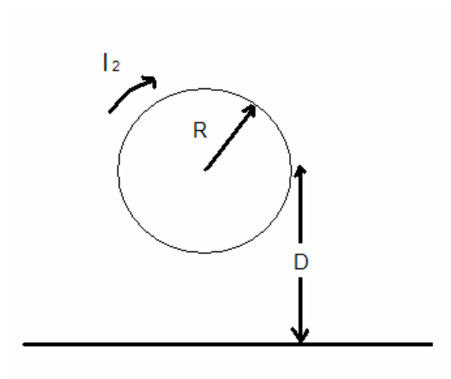
B) $\dfrac{Q}{\varepsilon_o R^2}$

C) $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}$

D) $\dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_o R}$

E) Nenhuma das anteriores.

5 B) Uma espira circular de raio R transporta uma corrente i_2 conforme a figura. O centro da espira está a uma distância D de um fio retilíneo muito longo. Qual o módulo da corrente i_1 que percorre o fio para que o campo magnético no centro da espira seja nulo.



A) $i_1 = 0$

B) $i_1 = \dfrac{R}{D} i_2$

C) $i_1 = \dfrac{\pi D}{R} i_2$

D) $i_1 = \dfrac{\pi D^2}{R^2} i_2$

E) nenhuma das anteriores.

6 A) Um raio de luz propagando-se no ar incide com ângulo θ_a sobre a superfície de uma placa transparente conforme a figura. Encontre o deslocamento lateral do raio.

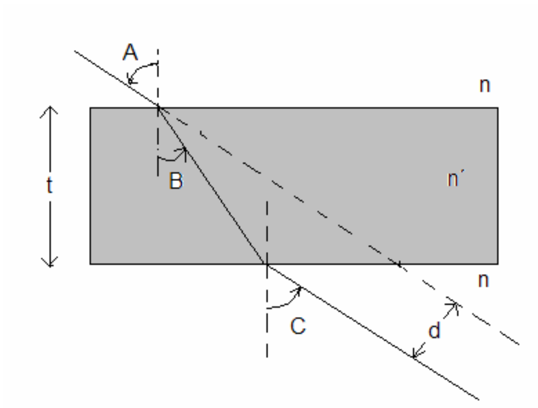
A) $d = t\dfrac{sen(A-b)}{\cos(A-C)}$

B) $d = t\dfrac{sen(A-B)}{\cos(A+B)}$

C) $d = t\dfrac{sen(A-B)}{\cos(B)}$

D) $d = t\dfrac{sen(A+B)}{\cos(A-B)}$

E) nenhuma das anteriores.



6 B) Um detector D e uma fonte de luz monocromática S estão separados por uma distância x estando ambos localizados no ar a uma distância h acima de uma placa de vidro. A distância x é pequena em comparação com h de modo que a reflexão é próxima da normal. Encontre a condição de interferência destrutiva no detector.

A) $\sqrt{x^2 + 4h^2} = (m + \frac{1}{2})\lambda$.

B) $\sqrt{-x^2 + 4h^2} + x = m\lambda$

C) $\sqrt{x^2 + 4h^2} + x = m\lambda$

D) $\sqrt{x^2 + 4h^2} - x = (m + \frac{1}{2})\lambda$

E) $\sqrt{x^2 + 4h^2} - x = m\lambda$

7A) Responda se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. (Você deve escrever uma pequena justificativa para cada item. Itens sem justificativa serão desconsiderados.)

a) ( ) Dado um problema de força central em mecânica quântica, é correto dizer que será impossível fazer medidas simultâneas do quadrado do momento angular ($\vec{L}^2$) e da projeção em z do momento angular (L_Z) do sistema.

b) ( ) O acoplamento spin-órbita modifica a energia do estado fundamental de um átomo de hidrogênio.

c) ( ) A estrutura geral do espectro dos átomos alcalinos é semelhante à do átomo de hidrogênio.

d) ( ) Dadas duas autofunções do átomo de hidrogênio, $\psi_{n,l,m_l}(r,\theta,\phi)$ e $\psi_{n',l',m_l'}(r,\theta,\phi)$
então $\iiint \psi^*_{n',l',m_l'}(r,\theta,\phi)\psi_{n,l,m_l}(r,\theta,\phi)r^2 sen(\theta)drd\theta d\phi = 0$ se $n' \neq n$.

e) ( ) Se um operador qualquer comuta com a hamiltoniana de um sistema então é correto dizer que a grandeza física associada ao operador é uma constante de movimento.

7 B) Responda se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. (Você deve escrever uma pequena justificativa para cada item. Itens sem justificativa serão desconsiderados.)

a) ( ) Suponha que duas partículas idênticas não interagentes estão confinadas numa região qualquer do espaço. A função de onda total das duas partículas é corretamente escrita como $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_\alpha(\vec{r}_1)\phi_\beta(\vec{r}_2) + \phi_\alpha(\vec{r}_2)\phi_\beta(\vec{r}_1)\right)$, sendo $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ os vetores posição de cada uma delas.

b) ( ) Se à hamiltoniana de um sistema adicionarmos um potencial constante V_0 então o número total de autovalores da hamiltoniana irá aumentar.

c) ( ) A paridade das autofunções do oscilador harmônico unidimensional implica que o valor esperado do operador x será nulo para os estados com número quântico n ímpar.

d) ( ) As funções de onda de uma molécula de monóxido de carbono, CO, devem ser ou pares ou ímpares sob uma operação de inversão espacial.

e) ( ) Só existe efeito Zeeman se levarmos em conta o spin do elétron.

8 A) Uma partícula de massa *m* está sujeita a um potencial que a confina estritamente à uma região unidimensional de largura L. Dentro desta região o potencial é constante. Obtenha a expressão *relativística* para os níveis de energia (E_n) da partícula sob este potencial.

a) $\left(\dfrac{n^2h^2}{8mL^2}\right)^{1/2}$

b) $\dfrac{n^2h^2}{8mL^2}$

c) $\dfrac{h^2c^2n^2}{4L^2}+m^2c^4$

d) $\left(\dfrac{h^2c^2n^2}{4L^2}+m^2c^4\right)^{1/2}$

e) nenhuma das anteriores

8 B) Uma partícula encontra uma barreira de potencial de altura V_0 e largura L. Sua função de onda é dada por:

$$\Psi = \begin{cases} Ae^{+ikx} + Be^{-ikx}; \quad região\,1 \\ Ce^{-\alpha x} + De^{+\alpha x}; \quad região\ 2 \\ Fe^{+ikx}; \quad região\ 3 \end{cases}$$

Onde: $F = 4ik\alpha Ae^{-ikL}\left[(\alpha + ik)^2 e^{-\alpha L} - (\alpha - ik)^2 e^{+\alpha L}\right]^{-1}$

$k^2 = \dfrac{2mE}{\hbar^2}$; $\alpha^2 = \dfrac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$

I) A partícula tem energia maior ou menor que a barreira?

II) Use a aproximação de barreira "opaca" ($\alpha L >> 1$) e obtenha o coeficiente de transmissão da barreira.

a) $E < V_0; \quad 16\dfrac{E}{V_0}(1 - \dfrac{E}{V_0})e^{-\sqrt{8m(V_0 - E)}\quad L/\hbar}$

b) $E > V_0; \quad 16\dfrac{E}{V_0}(1 - \dfrac{E}{V_0})e^{-\sqrt{8m(V_0 - E)}\quad L/\hbar}$

c) $E < V_0; \quad \dfrac{E}{V_0}e^{-\sqrt{2m(V_0 - E)}\quad L/\hbar}$

d) $E > V_0; \quad \dfrac{E}{V_0}e^{-\sqrt{2m(V_0 - E)}\quad L/\hbar}$

e) nenhuma das anteriores

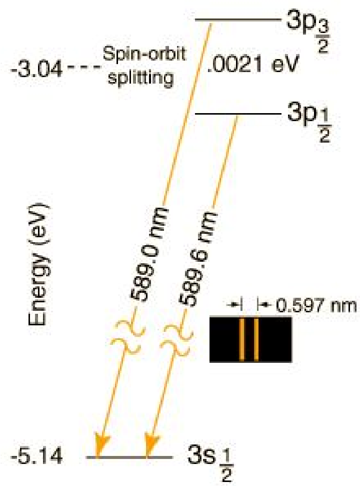
9 A) O dubleto do sódio corresponde à duas linhas intensas que dão a cor característica amarelada das lâmpadas de sódio. A origem do dubleto é a interação spin-órbita. Como mostrado na figura ao lado, a interação spin-órbita resulta em duas linhas com diferentes comprimentos de onda para as transições 3p -> 3s. Caso o sódio seja submetido à um campo magnético externo fraco (efeito Zeeman), responda:

i) Em quantos níveis é desdobrado o nível $3S_{1/2}$?

ii) Em quantos níveis é desdobrado o nível $3P_{1/2}$?

iii) Em quantos níveis é desdobrado o nível $3P_{3/2}$?

iv) Neste caso, quantas linhas distintas serão observadas relativas às transições 3p->3s?



a) 1; 1; 2; 3
b) 1; 2; 4; 6
c) 2; 2; 4; 10
d) 2; 2; 4; 12
e) nenhuma das anteriores

9 B) Considere uma carga q em um potencial de oscilador harmônico simples unidimensional. Podemos calcular a taxa de transições espontâneas para este sistema analisando o valor esperado do momento de dipolo elétrico ($p = q\ x$) para cada transição, sendo que a integral resultante é chamada de elemento de matriz.
Calcule os elementos de matriz para as transições entre:
i) estado fundamental e primeiro estado excitado
ii) estado fundamental e segundo estado excitado
iii) primeiro estado excitado e segundo estado excitado

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}};\quad 0;\quad \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$
b) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}};\quad 0;\quad \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$
c) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}};\quad \sqrt{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}};\quad \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$
d) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}};\quad 0;\quad 0$
e) nenhuma das anteriores

10 A) Considere uma transição entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado para uma partícula de massa *m* em um poço quadrado infinito unidimensional de largura *L* (V(x)=0 para –L/2 < x <L/2 e V(x)=∞ no restante do espaço).

Em um certo instante t=0, a função de onda para a partícula é dada por:

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x) + \psi_2(x))$$

Onde as soluções estacionárias são dadas por:

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} Cos(\pi x / L)\,; \quad \psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} Sen(2\pi x / L)$$

Calcule o valor esperado para a posição, <x>, em função do tempo para a partícula descrita pela função de onda $\Psi(x,t)$.

a) $\frac{32L}{9\pi^2} sen\left(\frac{3\pi\hbar}{2mL^2} t\right)$
b) 0
c) $\frac{16L}{9\pi^2} \cos\left(\frac{3\pi\hbar}{2mL^2} t\right)$
d) $\frac{32L}{9\pi^2} \cos\left(\frac{3\pi\hbar}{2mL^2} t\right)$
e) nenhuma das anteriores

10 B) Em um acelerador de partículas, realiza-se uma experiência fazendo uma partícula *A* (com energia *E*, relativística) colidir com uma partícula *B* (em repouso), e desse modo, produzindo três partículas *C*, *D*, *E*, através da reação $A + B \to C + D + E$. Calcule a energia mínima da partícula *A* para esta reação ocorrer no sistema de laboratório (onde B está em repouso), em termos das massas das partículas.

a) $(M_C + M_D + M_E - M_A - M_B)c^2$

b) $\dfrac{\left[(M_C + M_D + M_E)^2 - M_A^2 - M_B^2\right]c^2}{2M_B}$

c) $(M_C + M_D + M_E)c^2$.

d) $\dfrac{\left[(M_C + M_D + M_E)^2 - M_A^2 - M_B^2\right]c^2}{2M_A}$

e) $\dfrac{\left[(M_C + M_D + M_E)^2 - M_A^2 - M_B^2\right]c^2}{M_A + M_B}$

RELAÇÕES:

Utilizar $g \approx 10\ m/s^2$
Distância Terra-Sol (centro a centro): $D_{TS} = 1{,}5\times10^{11} m$
Distância Terra-Lua (centro a centro): $D_{TL} = 3{,}8\times10^{8} m$
Massa do Sol: $M_S \approx 2\times10^{30} kg$
Massa da Terra: $M_T \approx 6\times10^{24} kg$
Massa da Lua: $M_L \approx 7{,}4\times10^{22} kg$
Constante gravitacional universal: $G = 6{,}6\times10^{-11} Nm^2/kg^2$
Constante universal dos gases ideais: $R = 8{,}314 \frac{J}{mol.K}$.

FORMULÁRIO:

$$F = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad V = \frac{U}{q_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \oint \vec{B}.d\vec{l} = \mu_o (i_c + i_D)_{\text{int}}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad d\vec{F} = id\vec{l} \times \vec{B} \qquad i_D = \varepsilon \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}.\vec{n}dA = q_{\text{int}} \qquad \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad \Phi_E = \oint \vec{E}.\vec{n}dA$$

$$U = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2} \qquad \Phi_B = \oint \vec{B}.\vec{n}dA$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \oint \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \qquad C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

$$F = \frac{GMm}{r^2} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{msg}}$$

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = cte \qquad P = P_0 + \rho g h$$

$$I = \frac{1}{12}ML^2 \qquad I = I_{CM} + Mr^2$$

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} \qquad \sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha} \qquad PV = nRT$$

$$dQ = TdS \qquad \Delta Q = mc\Delta T \qquad PdV = VdP + RdT \qquad dU = CdT - PdV$$

$$\hat{H}\Psi = E\Psi\ ; \quad \hat{H} \leftrightarrow \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(sen\theta\frac{\partial}{\partial\theta})$$

Para partícula na caixa: $E_n = \dfrac{n^2\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$

Se $V = \dfrac{m\omega^2 x^2}{2}$, temos os autovalores: $E_n = (n + \dfrac{1}{2})\hbar\omega$

e temos as autofunções:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha x^2/2}$$

onde: $\alpha = \dfrac{m\omega}{\hbar}$

$$\psi_1(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{2\alpha}\ \ x\, e^{-\alpha x^2/2}$$

$$\psi_2(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}}(2\alpha x^2 - 1)\, e^{-\alpha x^2/2}$$

$$\psi_3(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{3}}(2\alpha^{3/2}x^3 - 3\alpha^{1/2}x)\, e^{-\alpha x^2/2}$$

Algumas autofunções de átomos hidrogenóides:

$$\Psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0} \qquad \Psi_{200} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\left(2 - \frac{Zr}{a_0}\right)e^{-Zr/2a_0}$$

$$\Psi_{210} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\left(\frac{Zr}{a_0}\right)e^{-Zr/2a_0}\cos\theta \qquad \Psi_{21\pm1} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\left(\frac{Zr}{a_0}\right)e^{-Zr/2a_0}\, sen\theta\, e^{\pm i\varphi}$$

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \qquad p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

Algumas integrais:

$$\int x\cos(ax)\ sen(2ax)\ dx = \frac{1}{18a^2}\left[-12ax\cos^3(ax) + 9\ sen(ax) + sen(3ax)\right]$$

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2}\, dx$$

n	I_n
0	½ $\pi^{1/2}$ $\alpha^{1/2}$
1	½ α^{-1}
2	¼ $\pi^{1/2}$ $\alpha^{-3/2}$
3	½ α^{-2}
4	3/8 $\pi^{1/2}$ $\alpha^{-5/2}$
5	α^{-3}